

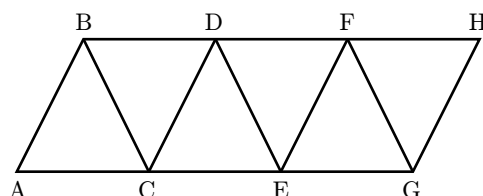
問題 1

次の問いに答えよ。

- (1) 1000 から 2022 までの整数のうち 2022 と互いに素である整数の個数は $\boxed{\text{アイウ}}$ 個である。
- (2) $x > 0$ において $\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2}$ の最小値は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。
- (3) 1 から $2n - 1$ までの n 個の異なる奇数からなるデータの標準偏差が 15 のとき、 $n = \boxed{\text{カキ}}$ である。ただし $n > 2$ とする。
- (4) a, b を定数とし、 $0 < a < b < 2\pi$ を満たすとする。任意の実数 x に対して $\cos x + \cos(x + a) + \cos(x + b)$ が一定になるとき、 $a = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ 、 $b = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$ である。
- (5) 直線 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ が $y = 2x^2 - 6x + 10$ と $y = 3x^2 - 20x + 35$ の両方の曲線に接するとき、 $a = \boxed{\text{シ}}$ 、 $b = \boxed{\text{ス}}$ である。ただし $a > 0$ 、 $b > 0$ とする。
- (6) 座標平面上の曲線 $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = \sqrt{2}$ で囲まれる部分の面積は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。
- (7) 座標平面上に点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ と動点 $P(p, \sqrt{p^2 + p + 1})$ がある。 $\angle APB$ の二等分線と x 軸の交点を Q とするとき、 $\left(\frac{QB}{AQ}\right)^2$ の最大値は $\boxed{\text{タ}}$ 、最小値は $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。
- (8) 袋の中に赤玉が 17 個、白玉が 3 個はいっている。よくかき混ぜてから 4 個を取り出す。赤玉だけが 4 個取り出される確率は $\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ 、赤玉が 3 個、白玉が 1 個取り出される確率は $\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。
- (9) 実数 x, y が 3 つの不等式 $3x - y + 7 \geq 0$ 、 $2x + y - 2 \leq 0$ 、 $x - 2y - 1 \leq 0$ を満たす。このとき $x^2 + 8y$ の最大値は $\boxed{\text{ハヒ}}$ 、最小値は $\boxed{\text{フヘ}}$ である。
- (10) 実数 a に対して複素数平面上の 4 点 $A(-2)$ 、 $B(-7 - 5i)$ 、 $C(1 - 9i)$ 、 $D(a - 2i)$ が同一円周上にあるとき、この円の中心を表す複素数は $\boxed{\text{ホマ}} + \boxed{\text{ミム}}i$ であり、 $a = \boxed{\text{メ}}$ である。ただし $a > 0$ 、 i は虚数単位とする。

問題 2

全ての面が1辺の長さ2の正三角形からなる六面体 S の展開図を示す。図の点 $A \sim$ 点 H は六面体 S のいずれかの頂点である。この六面体 S の三角形 ABC を底面として、平面 P 上に置く。次の問いに答えよ。



- (1) 六面体を作ったときに重なる点の組をすべて示せ。
- (2) 点 H と平面 P の距離を求めよ。
- (3) 六面体 S の全ての面に接する球の半径を求めよ。
- (4) 点 F と平面 P の距離を求めよ。
- (5) 線分 AB を含み平面 P に垂直な平面で六面体 S を切って2つの立体に分ける。このときで
きる2つの立体の体積の比を求めよ。

問題 3

座標平面上で、 $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq r < 1$ を満たす θ , r に対して点 $P_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ を図のように定める。

原点 $O(0, 0)$ を点 P_0 とし、 x 軸上の点 $(1, 0)$ を点 P_1 とする。

P_0P_1 方向から反時計回りに θ だけ向きを変えて P_1 から距離 r だけ進んだ点を点 P_2 とする。

P_1P_2 方向から反時計回りに θ だけ向きを変えて P_2 から距離 r^2 だけ進んだ点を点 P_3 とする。

P_2P_3 方向から反時計回りに θ だけ向きを変えて P_3 から距離 r^3 だけ進んだ点を点 P_4 とする。

このように、順に点 $P_{n+2} (n = 0, 1, 2, \dots)$ を P_nP_{n+1} 方向から反時計回りに θ だけ向きを変えて P_{n+1} から距離 r^{n+1} だけ進んだ点とする。この操作を無限に繰り返したときに近づく点を点 P_∞ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = \frac{1}{2}$ のとき、点 P_∞ の座標を求めよ。

(2) $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $r = \frac{1}{2}$ のとき、点 P_∞ の座標を求めよ。

(3) $\theta = \frac{\pi}{2}$ とし、 r を $0 \leq r < 1$ の範囲で変えるとき、点 P_∞ の軌跡を求め、図示せよ。

(4) $r = \frac{1}{2}$ とし、 θ を $0 \leq \theta < \pi$ の範囲で変えるとき、点 P_∞ の軌跡を求め、図示せよ。

