

## 問題 1

次の問いに答えよ。

- (1) ある試験を行ったところ、1 年生 40 名の平均得点は 10 点、分散は 20、2 年生 60 名の平均得点は 25 点、分散は 20 であった。2 学年 100 名のデータを合わせた平均得点は アイ 点、分散は ウエ である。

- (2)  $(x-7)(x-5)(x+1)(x+7) = 405$  の解のうち、整数解は オ と カ である。  
ただし オ < カ とする。

- (3) 3 個のサイコロを同時に投げるとき、出た目の積が 8 で割り切れる確率は  $\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$  である。

- (4)  $\log_9 x + 4 \log_x 3 = 3$  を満たす 2 桁の整数  $x$  は ケコ である。

- (5) 実数  $x$  に対し  $4 \sin 2x - 5 \sin x - 5 \cos x + 6$  は  $\sin x + \cos x = \frac{\text{サ}}{\text{シ}}$  のとき最小となり、  
最小値は  $\frac{\text{ス}}{\text{セソ}}$  である。

- (6)  $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n + 2$  で定義される数列を  $\{a_n\}$  とすると、 $\frac{a_{16} - a_{13}}{a_{12} - a_9} = \text{タチ}$  である。

- (7)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \text{ツテ}$  である。

- (8) 平面に互いに平行でないベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  があり、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, 3\vec{a} + 5\vec{b} + 6\vec{c} = \vec{0}$  を満たすとき、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\text{ト}}{\text{ナニ}}$  である。

- (9)  $a, b$  を実数の定数とする。4 次方程式  $x^4 + ax^3 + 2x^2 + 2x + b = 0$  の解の 1 つが  $1+i$  であるとき、実数解は ヌネ と ノ である。ただし  $i$  は虚数単位である。

- (10) 関数  $f(x) = \sqrt[4]{\frac{(x-6)^3}{(x-4)^2(x+2)}}$  の  $x=7$  における微分係数は  $\frac{\text{ハ}}{\text{ヒフ}}$  である。

- (11)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \frac{\text{ヘ}}{\text{ホマ}}$  である。

## 問題 2

座標空間ですべての頂点が格子点となっている直方体を格子点直方体と呼ぶことにする。ただし格子点とは  $x$  座標,  $y$  座標,  $z$  座標がすべて整数となっている点であり, 直方体には立方体も含まれる。1つの頂点が原点にあり, 原点から出る3つの辺がそれぞれ  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸上にある格子点直方体について, 次の問いに答えよ。ただし回転させて重なる直方体であっても異なる格子点に頂点があるものは, 異なる直方体として数える。

- (1) 原点から出る3辺がそれぞれ異なる長さ2, 3, 4である格子点直方体は何通り作れるか。
- (2) 原点から出る3辺の長さの和が9である格子点直方体は何通り作れるか。
- (3) 体積が64となる格子点直方体は何通り作れるか。
- (4) 体積が1800となる格子点直方体は何通り作れるか。

## 問題 3

原点を  $O$  とする座標平面上の曲線  $C$  を媒介変数  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) を用いて次のように定義する。

$$C: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta + (k - \theta) \cos \theta \end{cases}$$

ここで定数  $k$  は  $0 < k < \frac{\pi}{2}$  の範囲の実数である。

- (1)  $xy$  平面における曲線  $C$  のグラフの増減, 極値を調べよ。
- (2)  $k = \frac{\pi}{3}$  のとき  $xy$  平面上の  $0 \leq x \leq 1$  の範囲に曲線  $C$  のグラフの概形をかけ。
- (3)  $0 < k < \frac{\pi}{2}$  の範囲の任意の  $k$  について原点を通る直線と曲線  $C$  の交点の個数は 1 以下であることを示せ。

$0 \leq x \leq 1$  の範囲の任意の  $x$  に対してただ 1 つの  $\theta$  が定まり,  $\theta$  に対してただ 1 つ  $y$  が定まるから,  $y$  は  $x$  の関数として  $y = f(x)$  と書ける。曲線  $C$  上に点  $A(a, f(a))$ , 点  $B(b, f(b))$  を定め (ただし  $0 < a < b < 1$ ), 線分  $OA$ , 線分  $OB$ , および曲線  $C$  で囲まれる部分の面積を  $S$  とする。一方, 関数  $g(x)$  を  $g(x) = f(x) - xf'(x)$  と定義し,  $I = \int_a^b g(x)dx$  とおく。

- (4)  $S$  を  $I$  で表せ。

- (5)  $g(x)$  を  $x$  の式で表し,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき  $S$  を求めよ。