

一般選抜 1次 1月21日 数学

I (1) 三角関数について、次の関係式が成り立つ。

$$\cos 2\theta = \boxed{\text{アイ}} \sin^2 \theta + \boxed{\text{ウ}} ,$$

$$\sin 3\theta = \boxed{\text{エオ}} \sin^3 \theta + \boxed{\text{カ}} \sin \theta .$$

(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、関数

$$y = -\frac{1}{12} \sin 3\theta + \frac{3}{8} \cos 2\theta - \frac{3}{4} \sin \theta$$

は、 $\theta = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi$ で最小値 $\frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ をとり、 $\sin \theta = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のとき最大値

$\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ をとる。また、 y の極値を与える θ の個数は $\boxed{\text{ナ}}$ である。

II ツ の解答は該当する解答群から最も適当なもの一つ選べ.

自然対数の底を e として, 以下の問いに答えよ.

(1) C を積分定数として, 指数関数と単項式の積の不定積分について, 次式が成り立つ.

$$\int x e^{-3x} dx = - \left(\frac{\text{ア} x + \text{イ}}{\text{ウ}} \right) e^{-3x} + C$$

$$\int x^2 e^{-3x} dx = - \left(\frac{\text{エ} x^2 + \text{オ} x + \text{カ}}{\text{キク}} \right) e^{-3x} + C$$

また, 定積分について,

$$\int_0^1 |(9x^2 - 1)e^{-3x}| dx = \frac{1}{\text{ケ}} \left(-1 + \text{コ} e^{\text{サシ}} - \text{スセ} e^{-3} \right)$$

が成り立つ.

(2) p, q, r を実数の定数とする. 関数 $f(x) = (px^2 + qx + r)e^{-3x}$ が $x = 0$ で極大, $x = 1$ で極小となるための必要十分条件は,

$$p = \text{ソタ}, r, q = \text{チ}, r, \text{ツ}$$

である. さらに, $f(x)$ の極小値が -1 であるとする, $f(x)$ の極大値は $\frac{e^{\text{フ}}}{\text{ト}}$ となる.

このとき, $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$ である.

ツ の解答群

- ① $r > 0$ ② $r = 0$ ③ $r < 0$ ④ $r > 1$ ⑤ $r = 1$
 ⑥ $r < 1$ ⑦ $r > \frac{1}{3}$ ⑧ $r = \frac{1}{3}$ ⑨ $r < \frac{1}{3}$

Ⅲ ~ , および ~ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ.

(1) 座標平面上の3点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, C を頂点とする三角形について考える. 点 C の y 座標は正であり, 原点を O として, 以下の問いに答えよ.

(a) $\angle BAC < \angle ABC$ を満たす場合, 点 C は第 象限に存在する.

(b) $\angle ABC < \angle ACB$ を満たす場合, 点 C は の に存在する.

(c) $\angle ACB < \frac{\pi}{2}$ を満たす場合, 点 C は の に存在する.

(d) $\angle BAC \leq \angle ABC \leq \angle ACB \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす点 C が存在する領域(境界を含む)の面積は

$$\frac{\text{カ}}{\text{キク}} \pi - \frac{\sqrt{\text{ケ}}}{\text{コ}}$$

である.

, の解答群

- ① 点 A を中心とし点 B を通る円
- ② 点 B を中心とし点 A を通る円
- ③ 線分 AB を直径とする円
- ④ 離心率が 0.5 で2点 O, A を焦点とする楕円
- ⑤ 離心率が 0.5 で2点 O, B を焦点とする楕円
- ⑥ 離心率が 0.5 で2点 A, B を焦点とする楕円
- ⑦ 線分 AB を一辺にもち, 重心の y 座標が正である正三角形
- ⑧ 線分 AB を一辺にもち, 重心の y 座標が正である正方形

, の解答群

- ① 内部
- ② 周上
- ③ 外部
- ④ 重心

(2) 座標空間内の4点 $A(-1, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(s, t, 0)$, D を頂点とし,

$$\angle BAC < \angle ABC < \angle ACB$$

を満たす四面体を考える. $t > 0$ であり, 点 D の z 座標は正であるとして, 以下の問いに答えよ.

(a) $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ を満たす場合, 点 D は **サ** に存在する.

(b) $\angle ADC = \angle BDC = \frac{\pi}{2}$ を満たす場合, 点 D の x 座標は s であり, 点 D は

$(s, \text{シ}, 0)$ を中心とする半径 **ス** の円周上にある.

(c) 以下では, $t = \frac{4}{3}$ とする. 設問(1)の結果から, 点 C の x 座標 s は,

$$\text{セ} < s < -\text{ソ} + \frac{\text{タ} \sqrt{\text{チ}}}{\text{ツ}}$$

の範囲の値をとりうる. この範囲で s が変化するとき, $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = \frac{\pi}{2}$ を

満たす四面体 $ABCD$ の体積は, $s = \frac{\text{テ}}{\text{ト}}$ のとき最大値 $\frac{\text{ナ}}{\text{ニヌ}}$ をとる.

サ の解答群

- ① 線分 AC の中点を通り直線 AC に垂直な平面上
- ② 線分 AC を直径とする球面上
- ③ 線分 AC を直径とする球の内部
- ④ 点 A を中心とし点 C を通る球面上
- ⑤ 点 A を中心とし点 C を通る球の内部
- ⑥ 線分 AC を一辺にもつ正四面体の面上
- ⑦ 線分 AC を一辺にもつ正四面体の内部
- ⑧ 離心率が 0.5 で2点 A, C を焦点とする楕円を直線 AC のまわりに1回転させてできる立体の面上
- ⑨ 離心率が 0.5 で2点 A, C を焦点とする楕円を直線 AC のまわりに1回転させてできる立体の内部

シ, **ス** の解答群

- | | | | | |
|-----------------|--------|-----------------|-------------------|-------------------|
| ① s | ② t | ③ $2s$ | ④ $2t$ | ⑤ $\frac{s}{2}$ |
| ⑥ $\frac{t}{2}$ | ⑦ st | ⑧ $\frac{s}{t}$ | ⑨ $\frac{s+1}{2}$ | ⑩ $\frac{s-1}{2}$ |