令和４年度 入学試験問題

数学（後期）

試験時間	９０分
問題冊子	１～８頁

注意事項

1. 指示があるまで問題冊子は開かないこと。
2. 問題冊子および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. スマートフォン等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題冊子および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題冊子の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題冊子および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題冊子は持ち帰ること。

受験番号		氏名	

受験番号	

氏　名	

令和４年度（後期）

数　学

解答用紙（その１）

採点欄	

[Ⅰ]	問１	ア	イ	ウ	エ	オ	
		カ	キ	ク	ケ	コ	サ
		シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	問２	ツ	テ	ト			
[Ⅱ]	問１	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
		キ	ク	ケ			
	問２	コ	サ				
	問３	（説明・計算）					

答

$\beta =$

受験番号	

氏　名	

令和４年度（後期）

数　学

解答用紙（その２）

採点欄	

[III]

問１ (説明・計算)

答

$$\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}} =$$

問２

問３ $V =$

問４ (説明・計算)

答

$$V_{\max} =$$

受験番号	

氏　名	

令和４年度（後期）

数　学

解答用紙（その３）

採点欄	

[IV]	問 1	
	問 2	(説明・計算)
		ア　　　イ
	問 3	$R(t) =$
	問 4	(説明・計算)
		答　$I =$

[I] 以下の文中の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ト}$ に適する1以上の整数を解答欄に記入せよ。なお，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること。

問1 3以上の整数 m と実数 a (ただし，$a \neq 2$) に対し，x の m 次式 $(2x-a)^m$ を $(x-1)^3$ で割ったときの余りを

$$(2-a)^{m-2}\sum_{n=1}^{3} P_n(m)x^{3-n}$$

と表すとき，m の2次式 $P_n(m)$ $(n=1,\ 2,\ 3)$ を平方完成した形で求めると，

$$P_1(m) = \boxed{ア}\left(m - \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\right)^2 - \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$$

$$P_2(m) = -\boxed{カ}\left(m - \frac{\boxed{キ}-a}{\boxed{ク}}\right)^2 + \frac{a^2 - \boxed{ケ}a + \boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

$$P_3(m) = \boxed{シ}\left(m - \frac{\boxed{ス}-a}{\boxed{セ}}\right)^2 + \frac{a^2 - \boxed{ソ}a - \boxed{タ}}{\boxed{チ}}$$

となる。

問2 問1において，数列

$$\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}},\quad \frac{\boxed{キ}-a}{\boxed{ク}},\quad \frac{\boxed{ス}-a}{\boxed{セ}}$$

は初項 $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$，公差 $\dfrac{\boxed{ツ}-a}{\boxed{テ}}$ の等差数列となる。また座標平面上の3点

$$\left(\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}, -\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right),\quad \left(\frac{\boxed{キ}-a}{\boxed{ク}}, \frac{a^2 - \boxed{ケ}a + \boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right),\quad \left(\frac{\boxed{ス}-a}{\boxed{セ}}, \frac{a^2 - \boxed{ソ}a - \boxed{タ}}{\boxed{チ}}\right)$$

が同一直線上にあるための a に対する必要十分条件は $a = \boxed{ト}$ である。

（計　算　用　紙）

（計　算　用　紙）

[II] n を 3 以上の整数とする。中が見えない袋の中に白球が n 個，黒球が n 個，赤球が 3 個入っており，袋の中から 3 個の球を無作為に同時に取り出す試行を行う。取り出した 3 個の球の色の種類が 2 である確率を p_n とする。また，取り出した 3 個の球の色の種類が 2 であり，かつその 3 個の球に赤球が含まれない確率を q_n とする。このとき，以下の各問いに答えよ。また，以下の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{サ}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。ただし，分数形で解答する場合は，既約分数で答えること。

問 1　数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めると

$$p_n = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \frac{n^3 + \boxed{ウ}n^2 + \boxed{エ}n}{\left(n + \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)\left(n + \boxed{キ}\right)\left(n + \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\right)} \qquad \left(\text{ただし，} \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}} > \boxed{キ} > \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\right)$$

となる。

問 2　数列 $\{q_n\}$ の極限を $\alpha = \lim_{n \to \infty} q_n$ とすると，$\alpha = \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ となる。

問 3　問 2 の α に対し，極限 $\beta = \lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{\alpha}{p_n}\right)^n$ の値を求めよ。必要ならば自然対数の底の定義 $e = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ (ただし，t は実数)を用いてよい。

（計 算 用 紙）

[III]　実数の定数 l は $l \geqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ を満たすとする。四面体 ABCD において，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BD} = \mathrm{CD} = l$，辺 AB を 1 : 5 に内分する点を L，辺 BC の中点を M，辺 CD を 5 : 3 に内分する点を N とし，これら 3 点で定まる平面 LMN と直線 AD との交点を P とする。また，点 P から平面 BCD に垂線 PH を下ろしたとき，$\mathrm{PH} = \dfrac{l}{2}$ であるとする。$x = \mathrm{AM}$ とおき，四面体 ABCD の体積を V として，以下の各問いに答えよ。

問 1　$\dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}}$ を求めよ。

問 2　x がとりうる値の範囲を求めよ。答えのみでよい。

問 3　V を l と x を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　l を固定して，$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MD}} \geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} \geqq \dfrac{2}{3}$ を満たすように x を動かすとき，V の最大値 $V_{\max}$ を求めよ。

（計 算 用 紙）

［IV］ 関数 $f(x)$ $(x>0)$ は連続で，第 1 次導関数 $f'(x)$ が存在して連続で，第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在し，かつ $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ を満たすと仮定する。座標平面において，曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}\big(t, f(t)\big)$ における C の法線と，点 $\mathrm{B}\big(t+h, f(t+h)\big)$ $(h \neq 0)$ における C の法線の交点を $\mathrm{P}(h)$ とおく。h を 0 に限りなく近づけるとき，点 $\mathrm{P}(h)$ が限りなく近づく点を P とする。また，2 点 A，P 間の距離を $R(t)$ とおく。

問 1 点 $\mathrm{A}\big(t,f(t)\big)$ における C の法線の方程式を，t，$f(t)$，$f'(t)$ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2 点 P の座標を以下の形で求めよ。

$$\Big(t-\boxed{\quad ア \quad},\ f(t)+\boxed{\quad イ \quad}\Big)$$

問 3 $R(t)$ を求めよ。答えのみでよい。

問 4 以上の結果を用いて，関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{e^{2t}-1}\,dt$ $(x>0)$ に対して，次の定積分 I の値を求めよ。

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2} \frac{1}{R(t)}\,dt$$

（計　算　用　紙）