

数 学

2022 年度（令和 4 年度）

入 学 試 験 問 題

受 験 番 号	
---------	--

1. 注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) この問題冊子は 6 ページあります。
試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (3) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。
- (4) 解答用紙には、氏名、受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があります。それぞれに正しく記入し、マークしてください。
- (5) 問題用紙のどのページも切り離してはいけません。問題冊子の余白は計算用紙として使用してもかまいません。
- (6) 計算機能や辞書機能、通信機能などをもつ機器等の使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。
- (7) 試験終了後、解答用紙はもちろん、問題用紙も持ち帰ってはいけません。

2. 解 答 上 の 注 意

解答上の注意は、裏表紙にも記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし、冊子を開いてはいけません。また、解答用紙の左下に記載してある「注意事項」も読んでください。

- (1) 問題は , , の 3 つの大問があります。
- (2) 各問題文中の , などの には、数値または符号（+ , -）が入ります。これらを次の方法で、解答用紙の指定欄に、解答してください。

裏表紙につづく

1 関数 $f(x) = x^2$ がある。

(1) a を定数とし、放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = a(x - 1)$ が異なる 2 点 A, B で交わっている。

(i) a のとり得る値の範囲は $a < \boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}} < a$ である。

(ii) a が変化するとき、線分 AB の中点の軌跡は、放物線

$$y = \boxed{\text{ウ}} x^2 - \boxed{\text{エ}} x \text{ の } x < \boxed{\text{オ}} , \boxed{\text{カ}} < x$$

の部分である。

(iii) 点 (x, y) が (ii) で求めた軌跡上を動くとき、 $k = \frac{y+8}{x-1}$ のとり得る値の範囲は不等式 $\boxed{\text{キ}}$ で表され、 $p = -\boxed{\text{ク}}$, $q = \boxed{\text{ケコ}}$ である。

$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを、次の①~⑤から一つ選べ。

① $k < p, q < k$ ② $k \leq p, q < k$ ③ $k < p, q \leq k$

④ $k \leq p, q \leq k$ ⑤ $p < k < q$ ⑥ $p \leq k \leq q$

(2) 原点を O とし、放物線 $y = f(x)$ 上の点 C(1, 1) における接線を l とする。直線 OC の上側および直線 OC 上の点の集合を D_1 , 直線 l の下側および直線 l 上の点の集合を D_2 とし、領域 D を $D = D_1 \cap D_2$ とする。

(i) 直線 l の方程式は $y = \boxed{\text{サ}} x - \boxed{\text{シ}}$ である。

(ii) b を 0 以上の定数とし、点 (x, y) が領域 D を動くとき、 $bxy - (x + y)$ の最小値が -2 となるような b の値は $\boxed{\text{ス}}$ である。 $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを、次の①~⑥から一つ選べ。

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 3

④ $9 - 6\sqrt{2}$ ⑤ $9 + 6\sqrt{2}$

⑥ $6 - 2\sqrt{3}$ ⑦ $6 + 2\sqrt{3}$

また、 $bxy - (x + y)$ の最小値が -2 となるような x, y の値をそれぞれ α, β とするとき、 $4\alpha^2 - 4\beta$ の値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

計 算 用 紙

2 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = \frac{2}{7}$, $a_2 = \frac{10}{7}$, $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = \frac{6}{7}(n+1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たしている。

(1) $a_3 = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) $a_{n+1} - a_n = b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \frac{1}{\boxed{\text{エ}}} \left(\boxed{\text{オ}} n^2 + \boxed{\text{カ}} n + \boxed{\text{キ}} \right)$ である。

(3) p, q, r, s を定数として、 $a_n = pn^3 + qn^2 + rn + s$ と表すと、

$p = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$, $q = \boxed{\text{コ}}$, $r = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$, $s = \boxed{\text{ス}}$ である。

(i) $n \geq 2$ のとき、

$$\sum_{k=2}^n \frac{3k+7}{7a_k-2k} = \boxed{\text{セ}} - \frac{\boxed{\text{ソ}}}{n} + \frac{\boxed{\text{タ}}}{n + \boxed{\text{チ}}}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3k+7}{7a_k-2k} = \boxed{\text{ツ}}$$

である。

(ii) 実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。このとき、

$\sum_{k=1}^{19} [a_k] = \boxed{\text{テトナニ}}$ である。また、 $20 \leq \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n [a_k] \leq 22$ となる

ような n の値の範囲は $\boxed{\text{又ネ}} \leq n \leq \boxed{\text{ノハ}}$ である。

計 算 用 紙

(1) 関数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($x \geq 0$) がある。ただし、 e は自然対数の底とする。

(i) $f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ であり、 $\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = \boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とするとき、 $g'(x) = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\sqrt{x \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}}}$ であり、関数 $\frac{x}{g'(x)} - g(x)$ の導関数は $\boxed{\text{カ}} \sqrt{x \boxed{\text{キ}} - \boxed{\text{ク}}}$ である。

(2) 関数 $h(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 1}{5}}$ ($x \geq \frac{1}{2}$) があり、曲線 $y = h(x)$ を C とする。

また、 $p > \frac{1}{2}$ のとき曲線 C 上の点 $P(p, h(p))$ における接線を l とする。

(i) 直線 l の傾きを m とするとき、 m のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} < m \text{ である。}$$

(ii) $q = h(p)$ とし、直線 l と y 軸の交点を Q とする。点 Q の y 座標を q を

$$\text{用いて表すと } -\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} q \text{ である。また、線分 } PQ \text{ の長さの最小値は}$$

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}} \text{ であり、そのときの点 } P \text{ の座標は}$$

$$\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}, \frac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}} \right) \text{ である。}$$

(iii) $p = 1$ のとき、曲線 C 、 x 軸および直線 l で囲まれた部分の面積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネノ}}} \left\{ \log \left(\boxed{\text{ハ}} + \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}} \right) - \frac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}} \right\}$$

である。

計 算 用 紙

解答上の注意(つづき)

- (i) ア, イ, ウ, …… の1つ1つは, それぞれ, 0 から 9 までの数字, または, +, - のいずれか1つに対応します。それらを, ア, イ, ウ, … で示された解答欄にマークしてください。

〔例1〕

アイウ

 に -30 と答えたいときは,

ア	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	+	-	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
ウ	+	-	●	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- (ii) 分数形で解答する場合, 分数の符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。また, それ以上約分できない形で答えてください。

〔例2〕

エオ

 /

カ

 に $-\frac{5}{6}$ と答えたいときは,

エ	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	+	-	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9
カ	+	-	0	1	2	3	4	5	●	7	8	9

- (iii) 根号を含む形で解答する場合, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。例えば,

キ

 $\sqrt{\text{ク}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

- (iv) 根号を含む分数形で解答する場合, 例えば

ケ

 +

コ

 $\sqrt{\text{サ}}$ /

シ

 に $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを,

$\frac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\frac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけません。