医学部　[一般・学士]（第1次試験）　数学

※学士は設問【1】は必須、
【2】又は【3】のいずれか
1問を選択

試験時間　80分

注意事項　1. 数学(一般)の用紙は3枚である。3枚とも解答すること。
2. 3枚とも受験番号と氏名の記入を忘れないこと。
3. 【2】,【3】は，解答の過程を必ず記すこと。

【1】 次の各文の $\boxed{}$ にあてはまる答を求めよ。

(1) i を虚数単位とし，$\alpha = -2+2i$，$\beta = 3+i$ とする。このとき，α^5 の値は $\boxed{(ア)}$ である。
z は等式 $2|z-\alpha| = |z-\beta|$ を満たす複素数全体を動くとする。このとき，複素数平面上の点 P(z)が描く図形は円であり，その中心を表す複素数は $\boxed{(イ)}$ である。また，$|z|$ の最大値は $\boxed{(ウ)}$ である。

(2) $f(x) = \log \dfrac{x}{1-x}$ とする。関数 $f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \boxed{(エ)}$ である。方程式 $f^{-1}(x) - a = 0$ が実数解をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲は $\boxed{(オ)}$ である。方程式 $\{f^{-1}(x)\}^2 - bf^{-1}(x) - 3b = 0$ が実数解をもつとき，定数 b のとり得る値の範囲は $\boxed{(カ)}$ である。

(3) 等式 $30x - 23y = 1$ を満たす正の整数の組 (x, y) のうち，$x + y$ が最小となるものは $\boxed{(キ)}$ である。
$A = \{n \mid n$ は600以下の正の整数であり，30の倍数である$\}$，　$B = \{n \mid n$ は600以下の正の整数であり，n を23で割ると4余る$\}$
とおく。このとき，$A \cup B$ に属する正の整数の総和は $\boxed{(ク)}$ である。
また，m を正の整数とし，$\sqrt{m^2+120}$ は整数であるとすると，m のとり得る値は $\boxed{(ケ)}$，$\boxed{(コ)}$，$\boxed{(サ)}$，$\boxed{(シ)}$ である。

(4) 放物線 $C: y = x^2$ 上に，2つの動点 P(p, p^2)，Q(q, q^2) がある。点 P における C の接線 l_1 と点 Q における C の接線 l_2 は垂直であり，$p > 0$ であるとする。このとき，q は p を用いて $q = \boxed{(ス)}$ と表され，l_1 と l_2 および C で囲まれた部分の面積 S は p を用いて $S = \boxed{(セ)}$ と表される。
点 P における C の法線と点 Q における C の法線の交点を R とし，2つの線分 PR と QR および C で囲まれた部分の面積を T とおく。p が正の実数全体を動くとき，T の最小値は $\boxed{(ソ)}$ である。

【2】 次の問に答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(2) $x \neq 0$ を満たすすべての実数 x に対して，$e^x > 1 + x$ と $e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $\dfrac{2}{3} < \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \dfrac{\pi}{4}$ が成り立つことを証明せよ。

【3】 1つの箱を置ける台と2つの箱 A，B がある。箱 A には赤玉2個，青玉2個が入っており，箱 B には白玉3個，青玉1個が入っている。台の上に箱 A を置き，次の操作をくり返す。
(操作)　台に置かれている箱から玉を1個取り出して色を調べてから箱に戻し，台に置かれている箱を台から降ろす。取り出した玉が青玉であれば箱 B を台に置き，それ以外の色の玉であれば箱 A を台に置く。
正の整数 n に対し，n 回目の操作を終えたときに，台に箱 A が置かれている確率を a_n，台に箱 B が置かれている確率を b_n とおく。次の問に答えよ。

(1) 正の整数 n に対し，b_n と a_{n+1} をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(2) 正の整数 n に対し，a_n を n を用いて表せ。

(3) 正の整数 n に対し，1回目から n 回目までの n 回の操作で白玉を1回も取り出さない確率を n を用いて表せ。

(4) 正の整数 n に対し，1回目から n 回目までの n 回の操作で白玉をちょうど1回だけ取り出す確率を n を用いて表せ。