

数 学

2021 年度 (令和 3 年度)

入 学 試 験 問 題

受 験 号	
-------	--

1. 注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) この問題冊子は 6 ページあります。
試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (3) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。
- (4) 解答用紙には、氏名、受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があります。それぞれに正しく記入し、マークしてください。
- (5) 問題用紙のどのページも切り離してはいけません。問題冊子の余白は計算用紙として使用してもかまいません。
- (6) 計算機能や辞書機能、通信機能などをもつ機器等の使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。
- (7) 試験終了後、解答用紙はもちろん、問題用紙も持ち帰ってはいけません。

2. 解 答 上 の 注 意

解答上の注意は、裏表紙にも記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし、冊子を開いてはいけません。また、解答用紙の左下に記載してある「注意事項」も読んでください。

- (1) 問題は **1** , **2** , **3** の 3 つの大問があります。
- (2) 各問題文中の **ア** , **イウ** などの **□** には、数値または符号 (+ , -) が入ります。これらを次の方法で、解答用紙の指定欄に、解答してください。

裏表紙につづく

1

[1] x, y, z を 0 以上の整数とするとき、

$x + y + z = 2$ を満たす組 (x, y, z) は全部で **ア** 通りある。

また、 $x + y + z = 3$ を満たす組 (x, y, z) は全部で **イウ** 通りある。

[2] a, b, c を 1 以上の整数とする。

(1) $2700 = 2^{\text{エ}} \times 3^{\text{オ}} \times 5^{\text{カ}}$ である。

(2) $2700 = a \times b$ を満たす組 (a, b) は全部で **キク** 通りあり、そのなかで、 $a > b$ を満たすものは全部で **ケコ** 通りある。

(3) $2700 = a \times b \times c$ を満たす (a, b, c) の組は全部で **サシス** 通りある。

[3] a, b を 1 以上の整数とする。直角三角形の斜辺の長さが a 、残りの 2 辺の長さが b 、2700 であるとする。

(1) $a - b = 900$ を満たすとき $b =$ **セソタチ** である。

(2) (a, b) の組は全部で **ツテ** 通りある。

計 算 用 紙

2 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC があり、 $5\vec{PO} + \vec{PA} + 5\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ を満たす点 P がある。

(1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり、

$$\vec{OP} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}} \vec{OB} + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}} \vec{OC} \text{ である。また、}$$

$$|\vec{OP}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セソ}}} \text{ である。}$$

(2) 四面体 PABC の体積は $\frac{\boxed{\text{タ}} \sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツテト}}}$ である。

(3) 線分 OA の中点を D、線分 OB を 2 : 1 に内分する点を E とする。
また、平面 DEP と直線 OC の交点を F とする。

(i) $\frac{OF}{FC} = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ であり、 $\triangle DEF$ の面積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヌネ}}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ である。

(ii) 点 F から平面 OPE に下ろした垂線を FG とすると

$$OG = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}} \text{ である。}$$

計 算 用 紙

3 以下の問題では、 \log を自然対数、 e を自然対数の底、 n を自然数、 O を原点とする。

[1] s を正の定数とするとき、曲線 $y = \log x$ 上の点 $(s, \log s)$ における接

線の方程式は、 $y = \frac{\text{ア}}{s}x + \log s - \text{イ}$ である。この接線が

原点 O を通るとき $\log s = \text{ウ}$ であり、接線と $y = \log x$ および x 軸

で囲まれる図形の面積は $\frac{e}{\text{エ}} - \text{オ}$ である。

[2] $f(x) = (\log x)^{2n}$ とする。

(1) $f(x)$ は $x = \text{カ}$ のとき最小値 キ をとる。また、曲線

$y = f(x)$ の変曲点については、 ク 。 ク に当てはまるものを下の①～③のうちから一つ選べ。

- ① $0 < x < 1$ の範囲に一つ存在する
- ② 点 $(1, f(1))$ が変曲点となる
- ③ $x > 1$ の範囲に一つ存在する
- ④ 変曲点をもたない

(2) t を $0 < t < \text{カ}$ を満たす実数とする。ここで、二つの カ は同じ値である。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を l とする。直線 l と x 軸、 y 軸の交点をそれぞれ A, B とし、 $\triangle OAB$ の面積を $S(t)$ とすると、

$$S(t) = \frac{t(\log t)^{\text{ケ}}^{n-\text{コ}} \left(\log t - \text{サ} \right)^{\text{シ}}}{\text{ス}^n}$$

である。

$S(t)$ は $t = e^{-\text{セ}}^n$ のとき,

最大値 $\text{ソ} \cdot \text{タ}^n + \text{チ} \cdot n \cdot \text{ツ}^n \cdot e^{-\text{テ}}^n$ をとる。

このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\text{セ}}^n = \frac{\text{ト}}{e^{\text{ナ}} - \text{ニ}}$ となる。ここで, 二つ

の セ は同じ値である。

解答上の注意(つづき)

- (i) ア, イ, ウ, …… の1つ1つは, それぞれ, 0 から 9 までの数字, または, +, - のいずれか1つに対応します。それらを, ア, イ, ウ, … で示された解答欄にマークしてください。

〔例1〕

ア

イ	ウ
---	---

 に -30 と答えたいときは,

ア	+	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	+	-	0	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8	9
ウ	+	-	<input checked="" type="radio"/>	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- (ii) 分数の形の解答が求められているときは, 既約分数で, 分母が正の数になる形で答えてください。

〔例2〕

エ

オ
カ

 に $-\frac{5}{6}$ と答えたいときは,

エ	+	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	+	-	0	1	2	3	4	<input checked="" type="radio"/>	6	7	8	9
カ	+	-	0	1	2	3	4	5	<input checked="" type="radio"/>	7	8	9

- (iii) 根号を含む形で解答する場合, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。例えば,

キ

 $\sqrt{\text{ク}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを, $2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

- (iv) 根号を含む分数形で解答する場合, 例えば

$$\frac{\text{ケ} + \text{コ} \sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}} \text{ に } \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \text{ と答えるところを,}$$

$$\frac{6 + 4\sqrt{2}}{4} \text{ や } \frac{6 + 2\sqrt{8}}{4} \text{ のように答えてはいけません。}$$