数　　学

2019年度（平成31年度）

入　学　試　験　問　題

受験番号	

1. 注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

(2) この問題冊子は6ページあります。

試験中に，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(3) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。

(4) 解答用紙には，氏名，受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があります。それぞれに正しく記入し，マークしてください。

(5) 問題冊子のどのページも切り離してはいけません。問題冊子の余白は計算用紙として使用してもかまいません。

(6) **計算機能や辞書機能，通信機能などをもつ機器等の使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。**

(7) 試験終了後，解答用紙はもちろん，問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙にも記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし，冊子を開いてはいけません。また，解答用紙の左下に記載してある「注意事項」も読んでください。

(1) 問題は $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ の3つの大問があります。

(2) 各問題文中の $\boxed{\text{ア}}$ ， $\boxed{\text{イウ}}$ などの $\boxed{}$ には，数値または符号（＋，－）が入ります。これらを次の方法で，解答用紙の指定欄に，解答してください。

裏表紙につづく

解答上の注意（つづき）

（i） **ア**，**イ**，**ウ**，…… の1つ1つは，それぞれ，0 から 9 までの数字，または，＋，－ のいずれか 1つに対応します。それらを，**ア**，**イ**，**ウ**，… で示された解答欄にマークしてください。

〔例1〕 $\boxed{\text{ア}}$ $\boxed{\text{イウ}}$ に -30 と答えたいときは，

ア	⊕	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊕	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	⊕	⊖	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

（ii） 分数の形の解答が求められているときは，**既約分数で，分母が正の数になる形で答えてください。**

〔例2〕 $\boxed{\text{エ}}\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{5}{6}$ と答えたいときは，

エ	⊕	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
オ	⊕	⊖	⓪	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨
カ	⊕	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	●	⑦	⑧	⑨

1 半径 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ の円に内接する四角形 ABCD において，三角形 ABD は正三角形であるとする。線分 AC と線分 BD の交点を E とし，点 E は BD を 1 : 2 に内分する点であるとする。

(1) $|\overrightarrow{AB}| = \boxed{ア}$，$|\overrightarrow{AD}| = \boxed{イ}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(2) $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{AD}$ であり，$|\overrightarrow{AE}|^2 = \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。

(3) 点 A を通る直径の他端を F とすると，

$\overrightarrow{AF} = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\overrightarrow{AD}$ であり，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE} = \boxed{ソ}$ である。

実数 t を用いて $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AE}$ とおくと，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FC} = \boxed{タ}$ であるから，

$t = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ となる。

(4) 正三角形 ABD の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{ト}}$ であり，四角形 ABCD の面積は

$\dfrac{\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌネ}}$ である。

2 箱 A には赤球1個と白球1個が，箱 B には赤球1個と白球2個が入っている。2つの箱から同時に1個ずつ取り出して入れかえる操作を n 回繰り返す。n 回の操作後，箱 A に，赤球が2個入っている確率を a_n，赤球が1個だけ入っている確率を b_n，赤球が入っていない確率を c_n とする。

（1） $a_1 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$b_1 = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

（2） 任意の自然数 n について，

$$a_n + b_n + c_n = \boxed{\text{オ}}$$

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} c_n$$

が成り立つ。

$\boxed{3}$ $0 \leqq t \leqq \pi$ とする。原点を O とし，点 A の座標を $(\cos t,\ \sin t)$ とする。点 O を，点 A を中心に時計回りに $3t$ 回転移動させた点を P とし，点 P の座標を $(f(t),\ g(t))$ とする。

（1） $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により，

$$f(t) = \cos t\ \boxed{\text{ア}}\ \cos\ \boxed{\text{イ}}\ t, \qquad g(t) = \sin t\ \boxed{\text{ウ}}\ \sin\ \boxed{\text{エ}}\ t$$

である。ここで，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ は，それぞれ，符号 $+$，$-$ のいずれかである。

（2） $t = a$ において $f(t)$ が最大値をとるとき $\cos a = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，

$f(a) = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

（3） $0 < c < \pi$ とし，$t = c$ のとき点 P は原点にあるとする。

（i） $c = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である。

（ii） $\displaystyle\int_0^c \sin^2 t\, dt = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$，

$\displaystyle\int_0^c \sin t \sin 2t\, dt = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

（iii） t が $0 \leqq t \leqq c$ の範囲を動くとき，点 P が描く曲線で囲まれる図形の面積を S とする。$S = \displaystyle\int_0^c g(t) f'(t)\, dt$ が成り立つことを用いると，

$$S = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$$

である。

(3) A, B, C を実数とし，b_n に関する漸化式

$$b_{n+2} + A b_{n+1} - B b_n = C$$

が成り立つとする。

(i) $A = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$, $B = \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$, $C = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。

(ii) $p_n = b_n - x$ とし，$p_{n+2} + A p_{n+1} - B p_n = 0$ が成り立つとする。

このとき，$x = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ である。

さらに，実数 α, $\beta(\alpha < \beta)$ が $(p_{n+2} - \alpha p_{n+1}) = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$ を満たすとする。このとき $\alpha = -\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$, $\beta = \dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ である。

このことから，任意の自然数 n について，

$$b_n = \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\alpha^n + \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フヘ}}\beta^n + \frac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}$$

が成り立つ。したがって，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = \frac{\boxed{ミ}}{\boxed{ム}}$ となる。