数　　　学

平成29年度

入学試験問題

受験番号	

1. 注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

(2) この問題冊子は14ページあります。

試験中に，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は，手を挙げて，監督者に知らせてください。

(3) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。

(4) 解答用紙には，氏名，受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があります。それぞれに正しく記入し，マークしてください。

(5) 問題冊子のどのページも切り離してはいけません。

(6) **計算機能や辞書機能，通信機能などをもつ機器等の使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。**

(7) 試験終了後，解答用紙はもちろん，問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙にも記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし，冊子を開いてはいけません。また，解答用紙の左下に記載してある「注意事項」も読んでください。

(1) 問題は $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の3つの大問があります。

(2) 各問題文中の $\boxed{ア}$，$\boxed{イウ}$ などの $\boxed{}$ には，数値または符号（＋，－）が入ります。これらを次の方法で，解答用紙の指定欄に，解答してください。

裏表紙につづく

解答を始めるまえに，つぎの**解答上の注意のつづき**を読んでください。

解答上の注意のつづき

（i） **分数の形の解答枠に，整数の解答をしたいときは，分母が 1 の分数の形になるように答えてください。** たとえば，$\dfrac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは，$\dfrac{2}{1}$ と答えてください。

（ii） 解答枠 $\boxed{}$ に，**解答枠の桁（けた）数より少ない桁数の整数を解答したいときは，数字が右づめで，その前を 0 でうめるような形で答えてください。** たとえば，$\boxed{\text{ヨワ}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは，0 2 と答えてください。**ヨ の 0 をマークしないままにしておくと，間違いになります！**

（解答上の注意終）

$\boxed{1}$ θ を実数とし，i を虚数単位とする。

（1） A，B を実数の定数とし，任意の実数 θ に対して，

$$\sin 3\theta = \sin\theta\cdot(A - B\sin^2\theta)$$

が成り立つとする。

（i） $A = \boxed{\text{ア}}$，$B = \boxed{\text{イ}}$ である。

（ii） $\dfrac{1}{2}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ とし，3 次方程式 $Ax - Bx^3 = \dfrac{1}{2}$ の最も小さい解が $\sin\theta$ に等しいとき，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}\pi$ である。

（2） a，b，c を実数の定数とし，任意の実数 θ に対して，

$$\sin 5\theta = \sin\theta \cdot f(\sin^2\theta)$$

を満たす２次関数　$f(x) = ax^2 + bx + c$　を考える。

（ｉ） 複素数　$\left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^5$　の虚部の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

（ii） α，β を実数とするとき，複素数　$(\alpha + i\beta)^5$　の虚部は

$$\boxed{\text{ク}}\,\alpha^4\beta - \boxed{\text{ケコ}}\,\alpha^2\beta^3 + \beta^5$$

に等しい。

（iii） $a = \boxed{\text{サシ}}$，$b = -\boxed{\text{スセ}}$，$c = \boxed{\text{ソ}}$　である。

（iv） ２次方程式　$f(x) = 0$　の解 x は

$$x = \frac{\boxed{\text{タ}} - \sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}} \quad と \quad x = \frac{\boxed{\text{タ}} + \sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。ここで，２つの $\boxed{\text{タ}}$，２つの $\boxed{\text{チ}}$，２つの $\boxed{\text{ツ}}$ は，それぞれ，同じ値である。

（ｖ） $\cos\frac{2}{5}\pi = \dfrac{-\boxed{\text{テ}}\ \boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$　である。

ただし，$\boxed{\text{ト}}$ は，符号＋，－のいずれかである。

（3） p，q，r，s を実数の定数とし，任意の実数 θ に対して，

$$\sin 7\theta = \sin\theta \cdot g(\sin^2\theta)$$

を満たす３次関数　$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$　を考える。

（ｉ） $p = -\boxed{\text{ヌネ}}$，$q = \boxed{\text{ノハヒ}}$，$r = -\boxed{\text{フヘ}}$，$s = \boxed{\text{ホ}}$　である。

（ii） $\sin\frac{2}{7}\pi \cdot \sin\frac{4}{7}\pi \cdot \sin\frac{6}{7}\pi = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミ}}}$　が成り立つ。

$\boxed{2}$ θ を実数とし，i を虚数単位とする。

（1） 複素数平面において，複素数 z が $2+\frac{3}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ の円周上にあるとし，$w=\frac{1}{z}$ とおく。

（i） $\left|2+\frac{3}{2}i\right|=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

（ii） $\left|w-\dfrac{\boxed{ウ}-\boxed{エ}\,i}{\boxed{オカ}}\right|=\sqrt{2}\,|w|$ が成り立つ。

（iii） w は中心 $-\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}+\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}i$，半径 $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\sqrt{2}$ の円周上にある。

（2） 複素数平面において

$$z_A=\cos\theta+i\sin\theta,\ \ z_B=\cos 2\theta+i\sin 2\theta,\ \ z_C=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

とし，複素数 z_A，z_B，z_C の表す点を，それぞれ，A，B，C とする。

（i） $\pi<\theta<2\pi$ とする。3 点 A，B，C を頂点とする三角形が正三角形となるのは $\theta=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\pi$ のときであり，直角三角形になるのは $\theta=\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\pi$ のときである。

（ii）　$0 < \theta < \pi$ とする。3 点 A，B，C を頂点とする三角形の面積を S とするとき，

$$S = \sin\theta \boxed{\text{テ}} \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \sin 2\theta$$

である。ただし，$\boxed{\text{テ}}$ は符号＋，－のいずれかである。

S が最大となるのは　$\theta = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\pi$　のときである。

このとき S の最大値は　$\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$　である。

（iii）　$\theta = 1$　とし，m，n を整数とする。m，n が　$\arg(z_A) = \arg\left(\dfrac{z_B^m}{z_C^n}\right)$ を満たすとき，m，n は，整数 k を用いて

$$m = 2 + \boxed{\text{ヒ}}\,k, \qquad n = \boxed{\text{フ}} + \boxed{\text{ヘ}}\,k$$

と表せる。このうち，m，n が共に 50 以上，150 以下を満たす m，n の組は $\boxed{\text{ホマ}}$ 組ある。

$\boxed{3}$ $f(x)=x+\dfrac{2}{\pi}\sin(\pi x)$ とする。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において，$f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のとき最大値

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}+\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\pi}$$ をとる。

(2) 曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における曲線 C の接線を l_t とする。

(i) $t=0$ のとき，直線 l_t の方程式は $y=\boxed{\text{カ}}\,x$ であり，$t=1$ のとき，直線 l_t の方程式は $y=-x+\boxed{\text{キ}}$ である。

(ii) $0 \leqq t \leqq 1$ において，直線 l_t の y 切片は

$t=\boxed{\text{ク}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとり，
$t=\boxed{\text{コ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

(iii) $0<t<1$ とし，曲線 C の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分，直線 l_t，直線 $x=0$，および，直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積を S_t とする。

S_t は $t=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\pi}-\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\pi^2}$ をとる。

解答上の注意(つづき)

(i) **ア**，**イ**，**ウ**，…… の1つ1つは，それぞれ，0 から 9 までの数字，または，＋，－ のいずれか 1つに対応します。それらを，**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークしてください。

〔例1〕 $\boxed{\text{ア}}\ \boxed{\text{イウ}}$ に －30 と答えたいときは，

ア	⊕ ● ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ	⊕ ⊖ ⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
ウ	⊕ ⊖ ● ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

(ii) 分数の形の解答が求められているときは，**既約分数で，分母が正の数になる形で答えてください。**

〔例2〕 $\boxed{\text{エ}}\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{5}{6}$ と答えたいときは，

エ	⊕ ● ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
オ	⊕ ⊖ ⓪ ① ② ③ ④ ● ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
カ	⊕ ⊖ ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ● ⑦ ⑧ ⑨