

数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

- (1) xy 平面上を動く点 P が、最初に座標 $(2, 0)$ の位置にある。白玉 2 個、赤玉 1 個、青玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し、色を調べてからもとに戻す。取り出した玉の色によって、次のように P を移動し硬貨をもらう試行を考える。

P が座標 (m, n) の位置にあるとき、

- ・ 取り出した玉の色が白色ならば、 P は座標 $(m + 1, n)$ の位置へ移動
- ・ 取り出した玉の色が赤色ならば、 P は座標 $(m, n + 1)$ の位置へ移動
- ・ 取り出した玉の色が青色ならば、 P は座標 $(m - 1, n)$ の位置へ移動

移動後に、 P の x 座標と y 座標の和が 0 または 3 のとき、硬貨を 1 枚もらう。

この試行を 4 回続けて行う。

このとき、3 回目の試行で初めて硬貨をもらう確率は (ア) であり、4 回目の試行で硬貨をもらい、かつ、もらう硬貨の総数が 2 枚となる確率は (イ) である。

- (2) $\triangle ABC$ において、 $AB=4$ 、 $BC=5$ 、 $CA=6$ とする。 $\triangle ABC$ の重心 G から辺 BC に下ろした垂線を GH とするとき、 $\frac{BH}{BC}$ の値は (ウ) である。

2. a, b は定数で $a > 1$ とする。2つの曲線 $C_1 : y = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$, $C_2 : y = \frac{e^x}{a^2} + b$ が共有点 P をもち、点 P において共通の接線をもつとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) C_1 の凹凸および変曲点を調べ、 C_1 の概形を描け。

(2) 点 P の座標と b を a で表せ。

(3) C_1, C_2 と y 軸で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を a で表せ。また、極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ を求めよ。

ただし、必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることを用いてよい。

3. m, n は自然数の定数とする。自然数 x, y が不等式

$$y \leq -x^2 + 20nx, \quad y \geq \frac{12n}{m}x$$

をみたすとき、 m の値に応じて、 $y - x$ の最大値と、そのときの x, y の値を n で表せ。

4. 方程式 $x^3 + 1 = 0$ の解のうち、虚部が正であるものを α とする。複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$, $B(-1)$, $C(\bar{\alpha})$ を頂点とする $\triangle ABC$ を考える。 $\triangle ABC$ の周上の点 $P(z)$ に対して、原点 O を端点とし $P(z)$ を通る半直線上に $|w| = \frac{1}{|z|}$ をみたす点 $Q(w)$ をとるとき、次の問いに答えよ。ただし、複素数 γ に共役な複素数を $\bar{\gamma}$ で表し、複素数平面上で複素数 γ を表す点 G を $G(\gamma)$ と書く。

(1) $w = \frac{1}{\bar{z}}$ となることを示せ。

(2) $P(z)$ が $\triangle ABC$ の周上を動くとき、 $Q(w)$ が描く図形によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。