問題 1

次の問いに答えよ。

(1) 2 つの変量 x, y についてのデータを示す。

x	5	2	3	4	6	8	7
y	5	8	7	6	4	2	3

x と y の相関係数 r に対し整数 a が $a \leqq 9r < a+1$ を満たすとき，$a = \boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) 1.024^{2021} は 10 進法で $\boxed{\text{ウエ}}$ 桁の数である。ただし $0.30102 < \log_{10} 2 < 0.30103$ である。

(3) xy 平面上で原点 O までの距離と点 A $(8, 0)$ までの距離の和が 10 以下となる領域の面積は $\boxed{\text{オカ}}\,\pi$ であり，この領域を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{\text{キク}}\,\pi$ である。

(4) 循環小数 $0.189189\cdots\cdots = 0.\dot{1}8\dot{9}$ を既約分数で表すと $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

(5) 正の整数 m に対して二次方程式 $x^2 - mx - 2m + 13 = 0$ が 2 つの異なる整数解を持つとき，$m = \boxed{\text{シス}}$ である。

(6) 複素数 x が $x^2 - x + 1 = 0$ を満たすとき，

$12x^{2026} + 23x^{2025} + 34x^{2024} + 45x^{2023} + 56x^{2022} + 67x^{2021} = \boxed{\text{セソ}}$ である。

(7) $x = \sqrt{23 + 8\sqrt{7}}$ に対して 2 つの整数 a，b が $a = x + \dfrac{b}{x}$ を満たすとき，$a = \boxed{\text{タ}}, b = \boxed{\text{チ}}$ である。

(8) 各面に 1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれた立方体のサイコロを 5 個同時に投げる。

出た目の積が 4 で割り切れる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

(9) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $1 - (8\sin^3 x + \cos^3 x)^2$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

(10) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{1}{x(\log x)^2}dx = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。ただし e は自然対数の底である。

問題 2

n を 2 以上の整数とする。n 校の学校から 2 名ずつ，計 $2n$ 名が集まっており，くじ引きで 2 名 1 組，計 n 組に組み分けを行う。同じ学校の生徒の組が 1 つもない確率を $P(n)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $P(2)$ を求めよ。

(2) $P(3)$ を求めよ。

(3) $P(4)$ を求めよ。

(4) $P(5)$ を求めよ。

問題３

空間内に四面体 OABC があり，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 15$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = 90^\circ$ である。平面 ABC 上に $\mathrm{OP} = 3\sqrt{11}$ となるように点 P をとり，点 P から平面 AOB，BOC，COA に下ろした垂線をそれぞれ PQ，PR，PS とする。

PQ，PR，PS を 3 辺とする直方体 T について，次の問いに答えよ。

(1) PQ，PR，PS の長さの和が一定になることを示せ。

(2) 直方体 T の全表面積が一定になることを示せ。

(3) 直方体 T の体積の最大値と最小値を求めよ。