

### 問題 1

次の問いに答えよ。

- (1) 5つの整数からなるデータ

$$-14, 16, 21, a, b$$

の平均が5, 分散が164,  $a < b$ のとき,  $a = \boxed{\text{アイ}}$ である。

- (2) 任意の実数  $\theta$  で  $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \cos(\theta + a\pi)$  が成り立つとき,  $a = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$  である。  
ただし,  $-1 \leq a < 1$  とする。

- (3) 実数  $x, y$  について  $5000^x = 2000^y = \sqrt{10}$  が成り立つとき,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \boxed{\text{カキ}}$  である。

- (4) 関数  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 9}}$  の  $x = 5$  における微分係数は  $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$  である。

- (5) 関数  $f(x) = 3x^2 + x \int_0^2 f(t)dt + a$  が  $f(2) = 0$  を満たすとき,  $a = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$  である。

- (6) 分母が3の累乗で, 0より大きく1より小さい既約分数を並べた数列

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{4}{27}, \dots$$

について, 第  $\boxed{\text{スセソ}}$  項は  $\frac{728}{729}$  であり, 初項から第  $\boxed{\text{スセソ}}$  項までの和は  $\boxed{\text{タチツ}}$  である。

- (7)  $\triangle ABC$  において  $AB = 36$ ,  $AC = 28$ ,  $BC = 48$ ,  $\angle BAC$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とすると,  $BD = \boxed{\text{テト}}$ ,  $AD = \boxed{\text{ナニ}}$  である。

- (8) ベクトル  $\vec{a} = (56, -33)$ ,  $\vec{b} = (12, 5)$  がある。 $|\vec{a} + t\vec{b}|$  は  $t = \boxed{\text{ヌネ}}$  のとき最小値  $\boxed{\text{ノハ}}$  をとる。

- (9) 2つの実数  $x, y$  が  $\left(\frac{2 + \sqrt{-77}}{9}\right)^{2021} = \frac{x + y\sqrt{-77}}{9}$  を満たすとき,  $x^2 + 77y^2 = \boxed{\text{ヒフ}}$  である。

- (10) 実数  $k$  に対して3次方程式  $x^3 + (4 - k)x^2 + (k + 13)x + 15 - 3k = 0$  が異なる3つの整数解  $\alpha, \beta, \gamma$  を持ち,  $2\beta = \alpha + \gamma$  のとき,  $k = \boxed{\text{ヘホ}}$  である。

## 問題 2

1, 2, 11, 12 の数字の 1 つが書かれたボールが各 1 個ずつ袋の中に入っている。この袋からボールを 1 個取り出してボールの数字を書きとめ、ボールを袋に戻す操作を 3 回行う。3 つの数字を取り出した順に左から右に並べて 1 つの整数を作る。例えば 1, 2, 2 の書かれたボールが順に取り出された場合は 3 桁の整数 122 が、11, 12, 1 の書かれたボールが順に取り出された場合は 5 桁の整数 11121 ができる。次の問いに答えよ。

- (1) できた整数が 4 の倍数となる確率を求めよ。
- (2) できた整数が 3 の倍数となる確率を求めよ。
- (3) 何通りの整数を作ることができるか。

### 問題 3

次の問いに答えよ。

- (1)  $xy$  平面上で、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲の実数  $\theta$  に対し、

$$\{x(x-2) + y^2\}(x \tan \theta - y) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad y \geq 0 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq x \leq 2$$

を満たす領域を図示せよ。

- (2) (1) の領域を  $x$  軸の回りに 1 回転してできる立体の体積の最小値と、そのときの  $\cos \theta$  の値を求めよ。