

受験番号						氏名	
------	--	--	--	--	--	----	--

2021 年度

数 学

I 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. この問題冊子は 4 ページあります。試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
3. 監督者の指示にしたがって解答用紙の下記の該当欄にそれぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 受験番号欄 受験番号を 5 ケタで記入し、さらにその下のマーク欄に該当する 5 ケタをマークしなさい。
 (例) 受験番号 10025 番 →

1	0	0	2	5
---	---	---	---	---

 と記入。
 - ② 氏名欄 氏名・フリガナを記入しなさい。
4. 受験番号が正しくマークされていない場合または正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
5. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
6. 試験終了後、問題冊子および解答用紙を机の上に置き、試験監督者の指示に従い退場しなさい。

裏表紙に、解答上の注意が続きます。この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

第 1 問

(1) は出題ミスにより、掲載しません。全員正解としています。

(2) すべての面が四角形となっている凸多面体 \mathbf{P} について考える。凸多面体 \mathbf{P} の面の数が 29 のとき、 \mathbf{P} の辺の数は $\boxed{\text{ウエ}}$ であり、 \mathbf{P} の頂点の数は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(3) 文字 x についての多項式 A は $x^3 - 2x^2 + 3$ で割ると $4x^2 + 5x + 33$ 余る。このとき A を $x^2 - 3x + 3$ で割った余りは $\boxed{\text{キク}}x + \boxed{\text{ケコ}}$ である。

(4) 整数 n は 9 で割ると 4 余り、11 で割ると 7 余る。このとき n を 99 で割った余りは $\boxed{\text{サシ}}$ である。

(5) 関数 $f(x) = -|x|^{\sqrt{6}}$ の $x = \sqrt{6} \cdot f(\sqrt{6})$ における微分係数は

$$f'(\sqrt{6} \cdot f(\sqrt{6})) = \boxed{\text{スセソ}}$$

である。

第2問

関数 $f(x) = 3 \cos \frac{x}{9} + 4 \sin \frac{x}{12}$ について考える。関数 $3 \cos \frac{x}{9}$ のすべての正の周期からなる集合を A とする。すなわち、

$$A = \left\{ p \mid p > 0 \text{ かつ すべての実数 } x \text{ について } 3 \cos \frac{x+p}{9} = 3 \cos \frac{x}{9} \right\}$$

とする。同様に、関数 $4 \sin \frac{x}{12}$ のすべての正の周期からなる集合を B とし、 $f(x)$ のすべての正の周期からなる集合を C とする。

集合 A の要素のうち最小の要素は π である。また、集合 $A \cap B$ の要素のうち最小の要素を p_0 とすると $p_0 = \text{}$ π である。

集合 $A \cap B$ の要素 p については、すべての実数 x について

$$3 \cos \frac{x+p}{9} = 3 \cos \frac{x}{9} \quad \text{かつ} \quad 4 \sin \frac{x+p}{12} = 4 \sin \frac{x}{12}$$

が成立するので、すべての実数 x について

$$f(x+p) = 3 \cos \frac{x+p}{9} + 4 \sin \frac{x+p}{12} = 3 \cos \frac{x}{9} + 4 \sin \frac{x}{12} = f(x)$$

が成立し、 $p \in C$ となる。したがって、 $A \cap B \text{ } C$ が示された。

関数 $f(x)$ の最大値を M とすると $M = \text{}$ であり、 $f(x) = M$ となる最小の正の実数 x を c とすると $c = \text{}$ π である。また $f(a) = M$ となる実数 a に対して整数 k があり $a = c + k p_0$ となるので $A \cap B = C$ が成立する。

(問) つぎの ①～⑨ の記号うち、上記の空欄 に当てはまる最も適当な記号は である。

- | | | | | |
|----------|-------------|-------------|-----------------|-----------|
| ① \cap | ② \cup | ③ \leq | ④ \geq | ⑤ \in |
| ⑥ \ni | ⑦ \subset | ⑧ \supset | ⑨ \Rightarrow | ⑩ \perp |

第 3 問

平面上に三点 O, A, B があり

$$OA = 7, \quad OB = 8, \quad AB = 9$$

となっている。

正の実数 t に対して動点 P を

$$\vec{OP} = t\vec{OA} + \frac{1}{t}\vec{OB}$$

となる点とし、点 P から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を Q とする。

- (1) ベクトル \vec{OA} とベクトル \vec{OB} の内積は $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \boxed{\text{アイ}}$ である。
- (2) 線分 OP の長さの最小値は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。
- (3) 線分 OQ の長さの最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

第4問

四次方程式

$$x^4 + 11x^3 + 31x^2 + 11x + 1 = 0 \quad (*)$$

について考える。 $x = 0$ は解ではないので、解 x に対して $y = x + \frac{1}{x}$ とおくと等式

$$y^2 + \boxed{\text{アイ}}y + \boxed{\text{ウエ}} = 0$$

が成立する。

四次方程式 (*) の四つの解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とすると

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \boxed{\text{オカキ}}$$

であり

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \boxed{\text{クケ}}$$

であり

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = \boxed{\text{コサシス}}$$

である。

II 解答上の注意

1. 問題の文中の , などの には、とくに指示のないかぎり、整数値が入ります。これらを次の方法で解答用紙の指定欄に解答しなさい。

(1) ア, イ, ウ, … の一つ一つは、それぞれ、符号 (-) または数字 (0 ~ 9) のいずれか一つに対応します。それらを ア, イ, ウ, … で示された解答欄にマークして答えなさい。


(例) に -8 と答えたいとき

ア	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
イ	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

(2) 分数形で解答する場合、それ以上約分できない形で答えなさい。分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

(例) $\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいとき

ウ	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
エ	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
オ	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

2. 解答を修正する場合は必ず「消しゴム」であとが残らないように完全に消しなさい。鉛筆の色や消しきずが残ったり、 のような消し方などをした場合は、修正したことになりません。

3. 解答をそれぞれの問題に指定された数よりも多くマークした場合は無回答とみなされます。