

一般選抜 1次 1月22日 数学

I (a) 赤玉2個, 黒玉4個, 白玉3個が入った袋から2個の玉を同時に取り出す. 取り出された

玉が2個とも黒玉である確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, 赤玉1個と黒玉1個が取り出される確率は

$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり, 黒玉1個と白玉1個が取り出される確率は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である.

(b) 赤玉, 黒玉, 白玉があわせて16個入った袋から2個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉1個, 黒玉1個を取り出す確率が $\frac{1}{5}$, 黒玉1個, 白玉1個を取り出す確率が $\frac{1}{3}$ であった. 赤

玉, 黒玉, 白玉の個数をそれぞれ x, y, z とすると, $xy = \boxed{\text{キク}}$, $yz = \boxed{\text{ケコ}}$ である. 袋に入っていた赤玉, 黒玉, 白玉の個数はそれぞれ $\boxed{\text{サ}}$ 個, $\boxed{\text{シ}}$ 個,

$\boxed{\text{ス}}$ 個である.

(c) 赤玉3個, 黒玉5個, 白玉7個が入った袋から3個の玉を同時に取り出す. 赤玉, 黒玉, 白

玉が1個ずつ取り出される確率は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である. 取り出された玉の色が2種類であった

とき, その中に赤玉が2個入っている確率は $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である.

II 座標平面上に3点A(0, 5), B(7, 4), C(6, -3)がある.

この3点を通る円Sの半径は $\boxed{\text{ア}}$, 中心は $(\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}})$ である. 2点B, C

を結ぶ短い方の弧の長さは $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$, $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{カキ}}$ であり, $\triangle ABC$ の内接円の

半径は $\boxed{\text{ク}}(\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-1)$ となる.

点Bと点D(-1, 4)を通り, y軸に平行な軸を持ち, 円Sと3つの点を共有する放物線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}x^2 - \boxed{\text{シ}}x + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

と

$$y = -\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}x^2 + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}x + \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である. この2つの放物線で囲まれた部分の面積は $\frac{\boxed{\text{ニヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である.

Ⅲ ~ および の解答は該当する解答群から最も適当なもの一つずつ選べ。

正の実数を定義域とする関数 $f(x) = \log_e x$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(a) 曲線 $y = f(x)$ 上の相異なる 3 点 $(s, f(s))$, $(t, f(t))$, $(u, f(u))$ を頂点とする三角形の重心は $G(\text{ア}, f(\text{イ}))$ である。

$y = f(x)$ は、そのグラフが 関数であり、三角形の重心 G は

$$x > 0, \text{ }$$

で表される領域に存在する。また、 $s = e^3$, $u = e^4$, $s < t < u$ である場合、この三角形の面積は

$$t = e^{\text{カキ}} (\text{カキ} + e)$$

のとき最大となる。

, の解答群

- | | | |
|-------------------------|---|---|
| ① $s + t + u$ | ② $\frac{s + t + u}{3}$ | ③ $\sqrt{s + t + u}$ |
| ④ $st + tu + us$ | ⑤ $(st + tu + us)^2$ | ⑥ stu |
| ⑦ $(stu)^{\frac{1}{3}}$ | ⑧ $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u}$ | ⑨ $\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u}\right)^{-1}$ |

の解答群

- | | |
|-------------------|-------------------|
| ① 下に凸で単調増加な | ② 下に凸で単調減少な |
| ③ 上に凸で単調増加な | ④ 上に凸で単調減少な |
| ⑤ 変曲点を 1 つもつ単調増加な | ⑥ 変曲点を 1 つもつ単調減少な |
| ⑦ 下に凸で極小値を 1 つもつ | ⑧ 上に凸で極大値を 1 つもつ |
| ⑨ 周期的で微分可能な | |

の解答群

- | | | |
|-----------------------------------|----------------|-----------------------------------|
| ① $y > f(x)$ | ② $y < f(x)$ | ③ $y > f\left(\frac{x}{2}\right)$ |
| ④ $y < f\left(\frac{x}{2}\right)$ | ⑤ $ y > f(x)$ | ⑥ $ y < f(x)$ |
| ⑦ $3y > f(x)$ | ⑧ $y < 3f(x)$ | |

(b) 数列 $\{f(a_n)\}$ が公差 -3 の等差数列となるのは、数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が **ク** 場合であり、

$$\log_b(a_2 \cdot a_{2021}) - \log_b(a_1)^2 = \text{ケコ}, \quad \text{ただし } b = \frac{a_{44}}{a_1}$$

が成り立つ。この数列が $\sum_{k=1}^5 f(a_k) = 0$ を満たすとき、 $f(a_n) = \text{サシ}n + \text{ス}$ であり、次式が成り立つ。

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_5 = \text{セ}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{e^{\text{シ}}}{e^{\text{タ}} - 1}$$

このとき、5以上の整数 n に対し、座標平面上の点 $(0, f(|f(a_n)|))$ を P_n 、 $(n, f(|f(a_n)|))$ を Q_n とすると、台形 $P_n Q_n Q_{n+1} P_{n+1}$ の面積 S_n は

$$S_n = \left(n + \frac{\text{チ}}{\text{ツ}} \right) \log_e \left(1 + \frac{1}{\text{テト} + n} \right)$$

であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \text{ナ}$ が成り立つ。

ク の解答群

- ① 公差 -3 の等差数列である
- ② 公差 $\frac{1}{e^3}$ の等差数列である
- ③ 公差 3 の等差数列の逆数からなる数列である
- ④ 公差 $-\log_e 3$ の等差数列である
- ⑤ 公比 -3 の等比数列である
- ⑥ 公比 $\frac{1}{e^3}$ の等比数列である
- ⑦ 公比 $-\log_e 3$ の等比数列である
- ⑧ $a_n = \frac{n!}{3}$ と表される
- ⑨ $a_n = \frac{1}{3n!}$ と表される

(c) 正の整数 n に対して $T_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ 、 $T_0 = 0$ とする。 $0 \leq m \leq 100$ の範囲で整数 m が変化するとき、 $T_{100} - T_m - T_{100-m}$ の最小値は **ニ** であり、最大となるのは $m = \text{ヌネ}$ のときである。