2020 M

数　　学

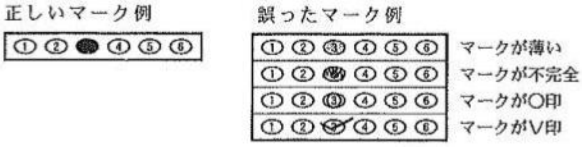
[注意事項]

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ, Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

受験番号のマーク例(13015の場合)

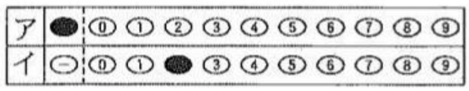
受験番号				
1	3	0	1	5
万位	千位	百位	十位	一位
	⓪	●	⓪	⓪
●	①	①	●	①
②	②	②	②	②
③	●	③	③	③
④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	●
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

5. 問 Ⅰ, Ⅱ において，マークするときは，HB または B の黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。

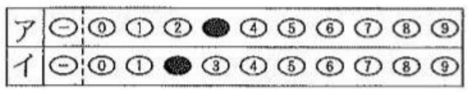


7. マークで解答する場合，□ の中の文字は，それぞれ符号(−)または，数字1文字が対応している。例えば，ア イ の形の場合，−9から−1の整数または10から99の整数が入り得る。

−2の場合



32の場合



8. 分数形で解答する場合，それ以上約分できない形で答えること。
9. 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。

I　$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1)　△ABC の辺 AB, BC, CA を 3:1 に内分する点をそれぞれ D, E, F とし，線分 AE と BF の交点を P, BF と CD の交点を Q, CD と AE の交点を R とする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c}$,

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}\vec{c}$ となる。

また，AP : PR : RE = $\boxed{サ}$: $\boxed{シ}$: $\boxed{ス}$ であり，△PQR の面積は △ABC の面積の $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$ 倍である。

△PQR の重心を G とすると $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\vec{c}$ となる。

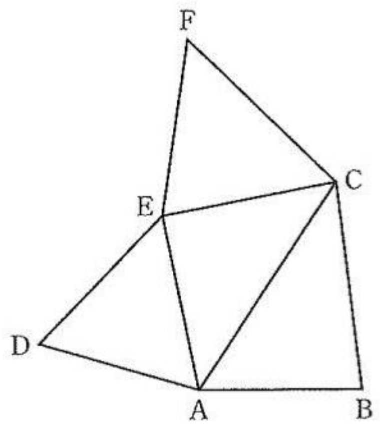
(2) 下図は四面体の展開図で，$AB=\dfrac{4}{3}$，$AC=2$，$DE=EA=EC=EF$，$\cos\angle ADE=\dfrac{\sqrt{14}}{8}$，$\triangle ABC$の面積は$\dfrac{5\sqrt{7}}{12}$である。この展開図から$\triangle ABC$を底面とした四面体EABCをつくる。$\triangle ABC$を含む平面を$\alpha$とし，四面体EABCの頂点Eから$\alpha$に下した垂線をEPとする。

1) このとき，$DE=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エオ}}$，$\sin\angle BAC=\dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{クケ}}$，

$BC=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$，$AP=\dfrac{\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セソ}}$となる。

2) 四面体EABCの4つの頂点が球S上にあるとき，Sの半径は

$\dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツテ}}$となる。



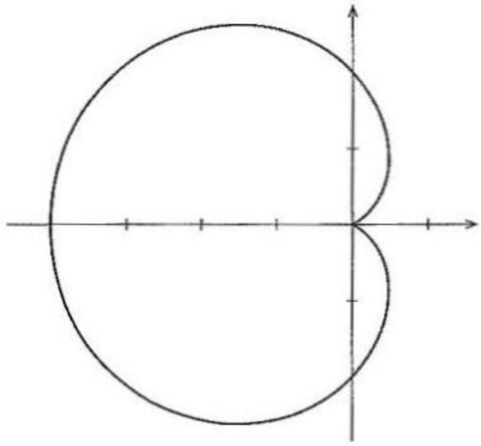
展開図

(3) 点A(−1, 0)を中心とする半径1の円Aがあり，半径1の円Qは円Aに外接しながら滑ることなく反時計回りに一周する。円Q上の点Pははじめ原点にある。点Pが描く曲線(下図左)について考えよう。下図右は角θ回転した状態を示す。円Qの中心Qの座標は

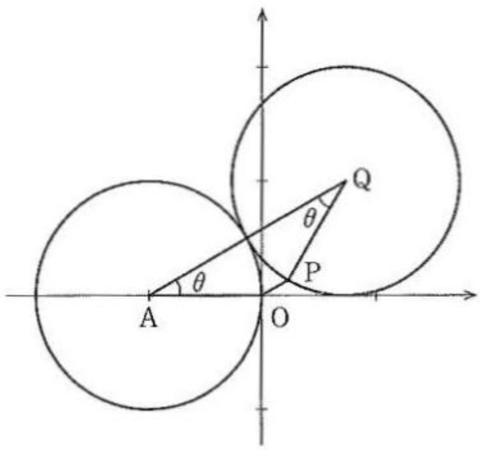
$\left(\boxed{\text{ア}}\cos\theta - \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ア}}\sin\theta\right)$なので，点Pの座標は

$\left(\boxed{\text{ア}}\cos\theta - \cos\boxed{\text{ウ}}\theta - \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ア}}\sin\theta - \sin\boxed{\text{ウ}}\theta\right)$

となる。したがって，点Pが描く曲線は極座標で$r(\theta) = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\cos\theta$と表される。一般に極座標で$r = r(\theta)\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$と表される曲線に囲まれた図形の面積は$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$，曲線の長さは$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$により求められるので，点Pが描く曲線に囲まれた図形の面積は$\boxed{\text{カ}}\pi$，曲線の長さは$\boxed{\text{キク}}$となる。



点Pが描く曲線



はじめからθ回転したとき

Ⅱ

(1) $\angle A = \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{AB} = r$，$\mathrm{BC} = 3r$ である直角三角形ABCを辺ACの周りに1回転させてできる回転体について考える。辺BCを底辺としたときの三角形ABCの高さを t とおくと，

$t = \dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}} r$ である。この回転体の体積を t で表すと $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\pi t^3$ である。これを t で微分すると，この回転体の側面積が得られる。したがって，この回転体の表面積は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi t^2$ と表される。

(2) 座標平面上に原点Oを中心とする半径 r の円Oがある。円周上に点A$(-r,\ 0)$，点B$(r,\ 0)$ をとり，点Aを通り傾き $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ の直線と円Oとの点A以外の交点をCとする。点Cの座標は $\left(\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}} r,\ \dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}} r\right)$ である。線分OB，OCおよび弧BCで囲まれた図形を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積が $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\pi r^3$ であることに注意すると，この回転体の表面積は $\dfrac{\boxed{セ}+\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}\pi r^2$ であることがわかる。

(3) 座標平面上の点$(0, R)$を中心とし，半径が r の円$(0 < r < R)$を x 軸の周りに1回転させてできる回転体(トーラス)の体積を $a\pi^b r^c R^d$ と表すと，$a = \boxed{チ}$，$b = \boxed{ツ}$，$c = \boxed{テ}$，$d = \boxed{ト}$ である。これより，この回転体の表面積を $s\pi^t r^u R^v$ と表すと，$s = \boxed{ナ}$，$t = \boxed{ニ}$，$u = \boxed{ヌ}$，$v = \boxed{ネ}$ である。

Ⅲ

(1) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n について次の不等式が成り立つ。

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

この不等式から $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ を導け。

(2) a を定数として，点$(0, a)$から曲線 $y = (1 + x)e^x$ に引くことのできる接線の本数を求めよ。