令和２年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

数　学 (70分)

Ⅰ　注意事項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。
　4，6，8，10，12ページ

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

① **受験番号欄**
　受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄にマークしなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

② **氏名欄**
　氏名・フリガナを記入しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

Ⅱ　解答上の注意

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

受験番号			

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字（0～9），符号（−，±），自然対数の底（e）のいずれかが入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。
なお，解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は，それぞれ大問の番号を表します。

例1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に -83 と答えたいとき。

1	解答欄												
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
イ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	e
ウ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	e

分数形で解答する場合は，**既約分数**で答えなさい。**符号は分子**につけ，分母につけてはいけません。

例2　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解答欄												
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
オ	−	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	e
カ	−	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9	e

（問題は次ページから始まる）

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい。

(1) 座標平面上で方程式 $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 = 4$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合を C とする。集合 C に属する点Pについて，原点Oとの距離OPの最大値および最小値を次の手順で求める。

OP $= r\,(r > 0)$，x 軸の正の部分から半直線OPまでの回転角を θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とすると，点Pの座標は $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と表すことができる。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおいて，$7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2$ を r と θ を用いて表すと

$$
\begin{aligned}
&7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2\\
&= r^2\left(\boxed{\text{ア}}\cos 2\theta + \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\sin 2\theta + \boxed{\text{エ}}\right)\\
&= r^2\left\{\boxed{\text{オ}}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}\right) + \boxed{\text{エ}}\right\}
\end{aligned}
$$

となる。これよりOPは，θ の範囲に注意すると，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi,\ \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$

のとき最大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとり，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi,\ \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$

をとることがわかる。

ただし，$\boxed{\text{キ}} < \boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{サ}} < \boxed{\text{ス}}$ とする。

(2) 双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1$ と直線 $\ell : y = k\,(x-1) + 3$ (k は定数) について，H と ℓ がただ1つの共有点をもつような定数 k の値は $k = \pm\boxed{\text{タ}},\ \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。また，H と ℓ が異なる2点A，Bで交わるとき，A，Bの x 座標をそれぞれ α，β とする。$\alpha + \beta$ の値を k を用いて表すと

$$
\alpha + \beta = \frac{\boxed{\text{テ}}k^2 - \boxed{\text{ト}}k}{k^2 - \boxed{\text{ナ}}}
$$

であり，点Q(1，3) について，AQ $=$ BQ を満たす定数 k の値は $k = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$ 実数x, yについての2つの不等式

$$2^{3x+3y+1}+2^{-3x-3y+1}+4^{x+y}+4^{-x-y}-5(2^{x+y}+2^{-x-y})-8 \leqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$(\log_2 x)^2 \leqq \log_2 x^2 - \log_x 8 \quad \cdots\cdots ②$$

がある。

$t=2^{x+y}+2^{-x-y}$とおく。①の左辺をtで表すと

$$\boxed{\text{ア}}\,t^3+t^2-\boxed{\text{イウ}}\,t-\boxed{\text{エオ}}$$

である。

条件①の下で，tのとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{カ}} \leqq t \leqq \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であり，$x+y$のとりうる値の範囲は

$$-\boxed{\text{ケ}} \leqq x+y \leqq \boxed{\text{コ}}$$

である。

$s=\log_2 x$とおく。条件②の下で，sのとりうる値の範囲は

$$-\boxed{\text{サ}} \leqq s < \boxed{\text{シ}}$$

である。よって，不等式②の解は

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \leqq x < \boxed{\text{ソ}}$$

である。

実数x, yが不等式①と②をともに満たすとき

$3x+2y$の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$ 白玉と赤玉があり，各玉には番号が1つずつ書かれている。正の整数 k について，番号 k の書かれた白玉を白 k，番号 k の書かれた赤玉を赤 k などと略記する。

(1) 白1，白2，白3，赤1，赤2，赤3の計6個の玉の円順列を作る。

(i) どの同じ番号の玉も隣り合う確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(ii) 白1と赤1が向かい合う確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，白1と赤1が向かい合い，かつどの同じ番号の玉も隣り合わない確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

また，どの同じ番号の玉も隣り合わない確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

(iii) 同じ番号の玉がちょうど1組隣り合う確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(2) 白1，白2，白3，白4，赤1，赤2，赤3，赤4の計8個の玉の円順列を作るとき，どの同じ番号の玉も隣り合わない確率は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチツ}}}$ である。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{4}$ 三角形 ABC は $\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{AC}=5$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=5$ を満たしている。

三角形 ABC の外心を O, 外接円を K とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{\text{ア}}$ である。また, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である。

(2) 円 K の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を三角形 DBC の面積が最大となるようにとり, 線分 AD と線分 BC との交点を E とする。

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である。また, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ (t は実数)とおくとき, t の値は $t=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(3) (2)の D について, 線分 BC 上に $\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=0$ かつ $\mathrm{BP}>\mathrm{CP}$ を満たす点 P をとる。このとき

$$\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{BP}}=\frac{\boxed{\text{ツ}}-\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

5 関数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}[x]-\left[\dfrac{1}{2}x\right]\right)\left|\cos\dfrac{\pi}{2}x\right|\ (x\geqq 0)$ がある。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $0\leqq x<1$ のとき $f(x)=\boxed{\text{ア}}$，$1\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=\frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\cos\frac{\pi}{2}x$$ である。

n を正の整数とする。$y=f(x)$ のグラフと x 軸，および直線 $x=2n$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V_n とすると，

$$V_1=\frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$$ であり，$$\sum_{k=1}^{4n}V_k=\frac{\pi n}{\boxed{\text{カ}}}$$ である。

(2) $$\int e^{-x}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\frac{\boxed{\text{キ}}\,e^{-x}}{\pi^{\boxed{\text{ク}}}+\boxed{\text{ケ}}}\left(\pi\sin\frac{\pi}{2}x-\boxed{\text{コ}}\cos\frac{\pi}{2}x\right)+C$$

である。ここで，C は積分定数である。

(3) $y=e^{-x}f(x)$ のグラフと x 軸，および直線 $x=2n$（n は正の整数）で囲まれる図形の面積を T_n とすると

$$T_1=\frac{1}{\pi^{\boxed{\text{サ}}}+\boxed{\text{シ}}}\left(\frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}-\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}^{\boxed{\text{タ}}}}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\boxed{\text{チ}}\,\pi-\boxed{\text{ツ}}}{\left(\pi^{\boxed{\text{テ}}}+\boxed{\text{ト}}\right)\left(\boxed{\text{ナ}}^{\boxed{\text{ニ}}}-\boxed{\text{ヌ}}\right)}$$

である。

（下　書　き　用　紙）