令和２年度　入学試験問題

数　学　問　題　用　紙（後期）

試験時間	９０分
問題用紙	１～８頁

注　意　事　項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題用紙は持ち帰ること。

受験番号		氏　名	

[I]　O を原点とする空間内において 2 点 A, B を $\mathrm{OA}=\sqrt{3}$, $\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ を満たすようにとる。さらに，点 P は以下の条件 (*) を満たしながら空間内を動くものとする。

(*)「$\mathrm{BP}=\sqrt{2}$, かつ $\angle\mathrm{AOP}=\dfrac{\pi}{3}$, かつ 4 点 O, A, B, P は同一平面上には存在しない。」

点 B から三角形 OAP を含む平面に垂線 BH を下ろす。$0<x<\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$ を満たす各 x に対して，条件 (*) と $\mathrm{OP}=x$ を満たす点 P が存在することは認めて良い。以下では $x=\mathrm{OP}$, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおく。このとき，以下の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ヒ}}$ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。ただし，有理数は既約分数で表わすこと。

問 1　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{p}$, $\vec{b}\cdot\vec{p}$ は x を用いてそれぞれ次のように表せる。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\qquad \vec{a}\cdot\vec{p}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}x,\qquad \vec{b}\cdot\vec{p}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2$$

問 2　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{p}$$

と表せる。このとき，s, t は x を用いてそれぞれ次のように表される。

$$s=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}x,\qquad t=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

問 3　$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$ は x を用いて次のように表せる。

$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2=\frac{1}{\boxed{\text{ソ}}}\left(-x^2+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}\,x+\boxed{\text{チ}}\right)$$

問 4　点 P が条件 (*) と $\dfrac{1}{3}\leqq\vec{b}\cdot\vec{p}\leqq\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$ を満たしながら動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$ は $x=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとり，$x=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネ}}+\boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ をとる。

（計　算　用　紙）

［II］ n を 1 以上の整数とする。中が見えない n 個の袋があり，それぞれの袋の中には 1 から 5 までの整数がそれぞれ 1 つずつ書かれたカードが 5 枚入っている。これら n 個の各袋からカードを 1 枚ずつ取り出すとき，取り出された n 枚のカードに書かれている数字の和が 3 の倍数である確率を p_n とする。

問 1　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

問 2　$\alpha = \lim_{n \to \infty} p_n$ に対して，不等式

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m} \leqq |p_n - \alpha| \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^{m}$$

を満たす n の値がちょうど 20 個存在するように 1 以上の整数 m の値を定めることは可能か。可能ならばその値を求め，不可能ならばその理由を説明せよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるとする。

（計 算 用 紙）

[III]　O を原点とする xyz 空間において，各 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し 3 点 P，Q，R を次のように定める。

$$\mathrm{P}\left(3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{3}{2}},\ 3^{\frac{1}{4}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta),\ \theta\right)$$
$$\mathrm{Q}\left(-(\sin\theta)^{\frac{3}{2}},\ (\cos\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}},\ \theta\right)$$
$$\mathrm{R}(0,\ 0,\ \theta)$$

θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を K とし，K を z 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

問 1　2 点 P，Q に対して，線分 PQ を $t:(1-t)$ (ただし，$0 \leqq t \leqq 1$) に内分する点を S_t とする。t が 0 から 1 まで動くとき，2 点 R，S_t 間の距離の最小値 l を θ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　次の不定積分を求めよ。ただし，積分定数は省略してよい。答えのみでよい。

$$\int \frac{1}{\sin\theta}d\theta$$

問 3　V の値を求めよ。

（計 算 用 紙）

[IV] 次で定義される関数 $f(s)$ に対して以下の各問いに答えよ。

$$f(s)=\begin{cases}\dfrac{s}{16} & (0 \leqq s \leqq 4),\\ -\dfrac{s}{16}+\dfrac{1}{2} & (4 < s \leqq 8),\\ 0 & (s<0 \text{ または } 8<s)\end{cases}$$

問 1　関数 $t=f(s)$ のグラフと，関数 $t=f(s)$ のグラフを s 軸方向に 4 だけ平行移動したグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ。答えのみでよい。

問 2　関数 $t=f(s)$ に対して $s \geqq 0$ を定義域とする関数 $t=F(s)$, $t=G(s)$ を次で定義する。

$$F(s)=\int_0^s f(u)du, \qquad G(s)=\int_0^s f(u-4)du$$

関数 $F(s)$, $G(s)$ をそれぞれ求め，これら 2 つの関数のグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ。

問 3　問 2 で求めた関数 $F(s)$, $G(s)$ に対し，$x=G(s)$, $y=F(s)$ とおく。点 $(x,\ y)$ の描く曲線の概形を xy 平面上に図示せよ。

問 4　問 2 で求めた関数 $F(s)$, $G(s)$ に対し，xy 平面上の 2 点 $(0,\ 1)$ と $(x,\ y)=(G(s),\ F(s))$ の間の距離の最小値を与える s の値を求めよ。

（計 算 用 紙）