

数 学

2020 年度 (令和 2 年度)

入 学 試 験 問 題

受 験 番 号	
---------	--

1. 注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) この問題冊子は 6 ページあります。
試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (3) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。
- (4) 解答用紙には、氏名、受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があります。それぞれに正しく記入し、マークしてください。
- (5) 問題冊子のどのページも切り離してはいけません。問題冊子の余白は計算用紙として使用してもかまいません。
- (6) 計算機能や辞書機能、通信機能などをもつ機器等の使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。
- (7) 試験終了後、解答用紙はもちろん、問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙にも記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし、冊子を開いてはいけません。また、解答用紙の左下に記載してある「注意事項」も読んでください。

- (1) 問題は , , の 3 つの大問があります。
- (2) 各問題文中の , などの には、数値または符号 (+ , -) が入ります。これらを次の方法で、解答用紙の指定欄に、解答してください。

裏表紙につづく

1 i を虚数単位とし、 $\alpha = 3 + 2i$ 、 $\beta = 4 + 7i$ とする。複素数平面において、原点を O とし、 α 、 β を表す点を、それぞれ $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ とする。3点 O 、 A 、 B を通る円の中心を $P(z)$ とする。

(1) $|\alpha|^2 = \boxed{\text{アイ}}$ 、 $|\beta|^2 = \boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2) $\frac{\beta}{\alpha} = \boxed{\text{オ}} + i$ が成り立つから、

$$\cos \angle AOB = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \sqrt{\boxed{\text{ク}}},$$

$$\sin \angle AOB = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(3) $\angle APB = \boxed{\text{シ}}$ $\angle AOB$ であるから、

$$\cos \angle APB = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}, \quad \sin \angle APB = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

したがって、

$$\frac{\beta - z}{\alpha - z} = \frac{\boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}} i}{\boxed{\text{テ}}}$$

が成り立つ。

これを z について解くと

$$z = \frac{-\boxed{\text{ト}} + \boxed{\text{ナニ}} i}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

となる。

計 算 用 紙

2 2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がある。数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = -6$,

$a_{n+1} = 2a_n + |a_n| + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たす。また、数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n = 4 - \frac{n+4}{n+2}b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たす。

(1) $a_2 = -$, $a_7 =$ である。

(2) $n \geq 7$ のとき

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\text{ウ}^{n-\text{エ}} - \text{オ} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{4} \left(\text{カ}^{n-\text{キ}} - \text{ク}n - \text{ケコ} \right)$$

である。

(3) $b_1 = \frac{\text{サ}}{\text{シ}}$ であり、 $n \geq 2$ のとき、

$$\frac{b_n}{n + \text{ス}} = \frac{\text{セ}}{\text{ソ}} \cdot \frac{b_{n-1}}{n + \text{タ}}$$

であるから、 $n \geq 1$ のとき $b_n = \left(n + \text{チ} \right) \left(\frac{\text{ツ}}{\text{テ}} \right)^n$ である。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} b_n b_{n+1}} = \frac{\text{ト}}{\text{ナ}}$ が成り立つ。

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(2a_n+1)b_n} = \text{ニ}$, $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n+2}{(2a_n+1)b_n} = \text{ヌネノ}$ である。

計 算 用 紙

3 a を正の定数とし、 $f(x) = 3xe^{-ax}$ とする。ただし e は自然対数の底である。

(1) $y = f(x)$ のグラフが、点 $(1, 1)$ を通るとき $a = \log$ であり、点 $(2, 1)$ を通るとき $a = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \log$ である。ただし、 \log は自然対数を表す。

(2) $f(x)$ の導関数と不定積分は、それぞれ、

$$f'(x) = \text{オ} \left(\text{カ} \text{キ} ax \right) e^{-ax}$$

$$\int f(x) dx = - \text{ク} \left(\text{ケ} \text{コ} ax \right) a^{-\text{サ}} e^{-ax} + C$$

である。ただし と は、それぞれ、符号 $+$ 、 $-$ のいずれかであり、 C は積分定数である。

(3) $y = f(x)$ が $x = X$ のとき最大値 M をとるとする。点 (X, M) は a

の値にかかわらず直線 $y = \frac{\text{シ}}{e} x$ 上にある。この直線を l とすると

き、 $y = f(x)$ のグラフと直線 l で囲まれた部分の面積は

$$\frac{\text{ス}}{a^2} \left(1 - \frac{\text{セ}}{\text{ソ} e} \right)$$

である。

計 算 用 紙

解答上の注意(つづき)

- (i) ア, イ, ウ, …… の1つ1つは, それぞれ, 0 から 9 までの数字, または, +, - のいずれか1つに対応します。それらを, ア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークしてください。

〔例1〕

ア

イウ

 に -30 と答えたいときは,

ア	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	+	-	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
ウ	+	-	●	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- (ii) 分数の形の解答が求められているときは, 既約分数で, 分母が正の数になる形で答えてください。

〔例2〕

エ

オ

 /

カ

 に $-\frac{5}{6}$ と答えたいときは,

エ	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	+	-	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9
カ	+	-	0	1	2	3	4	5	●	7	8	9