

令和 2 (2020) 年度入学試験問題 (後期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

## 数 学 (後 期)

[1]  $n$  を 2 以上の自然数とする。1 から  $n$  までの番号が 1 つずつ書かれた  $n$  枚のカードをよく混ぜ、1 枚取り出し、それを戻さずにもう 1 枚取り出す。

- (1) 1 枚目に取り出したカードの番号より 2 枚目の番号の方が小さい確率を求めよ。
- (2) 1 枚目に取り出したカードの番号より 2 枚目の番号の方が小さいという条件の下で、2 枚目の番号が 1 である確率を求めよ。

[2] 2 つの曲線  $C_1: y = x^2 - \frac{3}{2}$  と  $C_2: y^2 = -2x + \frac{9}{4}$  を考える。

- (1)  $C_1, C_2$  の共有点をすべて求めよ。
- (2) 2 つの領域  $y \geq x^2 - \frac{3}{2}$  と  $y^2 \leq -2x + \frac{9}{4}$  の共通部分  $W$  の面積  $S$  を求めよ。

[3]  $a, b$  を正の整数とし、関数  $f(x)$  を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x^b} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- (1)  $f(x)$  は  $x = 0$  で連続であることを示せ。
- (2)  $a \geq 2$  のとき  $f(x)$  はすべての  $x$  で微分可能であることを示し、導関数  $f'(x)$  を求めよ。
- (3)  $a \geq b + 3$  のとき  $f'(x)$  は  $x = 0$  で微分可能であることを示し、 $f''(0)$  の値を求めよ。

[4]  $p, q$  を素数とし  $p \neq q$  とする。

- (1)  $p^x = q^y$  を満たす有理数  $x, y$  を求めよ。
- (2)  $\log_p q$  は無理数であることを示せ。
- (3)  $a, b, c, d$  を 0 でない有理数とし、 $m = p^a q^b, n = p^c q^d$  とする。 $\log_m n$  が有理数であるための  $a, b, c, d$  の条件を求め、そのときの  $\log_m n$  の値を  $a, b, c, d$  を用いて表せ。

[5] 2 つの合同な直円錐  $U, V$  よりなる立体  $W$  がある。 $U, V$  は頂点  $O$  を共有し、それぞれの底面の円  $A, B$  はただ 1 点  $M$  を共有していて母線  $OM$  のみが  $U, V$  の共通部分である。また、 $A, B$  の中心を  $A, B$  とすると、 $OA = OB = 1$  であり、 $\angle AOM = \angle BOM = \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ) である。

この立体  $W$  を水平面  $\pi$  上に横たえる。 $\pi$  と  $U, V$  それぞれの共通部分の  $O$  を通る直線を  $l, m$  とする。 $A, B$  から  $l, m$  に下ろした垂線の足を  $A_1, B_1$  とし、 $\angle A_1OB_1 = 2\theta$  とする。

なお、以下の問いに答える際に、4 点  $O, A, M, B$  が同一平面上にあることと、 $AA_1, BB_1$  が水平面  $\pi$  に垂直であることは証明しなくて良い。

- (1) 内積  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  を  $\alpha$  を用いて表せ。
- (2) 内積  $\vec{OA_1} \cdot \vec{OB_1}$  を  $\alpha, \theta$  を用いて表せ。
- (3)  $\sin \theta$  を  $\alpha$  で表せ。