

令和 2 (2020) 年度入学試験問題 (前期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

数 学 (前 期)

[1] A_0, A_1, A_2 を一辺の長さ1の正三角形の頂点とし、 P_0 を辺 A_0A_1 上の点として $A_2P_0 = a_0 (0 < a_0 < 1)$ とする。さらに、 k を自然数として、

$$A_n = \begin{cases} A_0 & n = 3k \text{ のとき} \\ A_1 & n = 3k + 1 \text{ のとき} \\ A_2 & n = 3k + 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める。辺 $A_{n-1}A_n$ 上の点 P_{n-1} が定まったとき、 P_{n-1} から辺 A_nA_{n+1} に下ろした垂線の足を P_n と決め、 $A_nP_n = a_n$ とする。

- (1) a_n を a_{n-1} で表せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

[2] $\triangle ABC$ において $\angle A = \frac{\pi}{2}$ 、 $BC = 1$ 、 $\angle B = \theta$ とし、面積を S 、辺の長さの和を l とする。また $\triangle ABC$ を辺 BC の周りに1回転させてできる回転体 W の体積を V とする。

- (1) V を θ を用いて表せ。
- (2) $\frac{V}{Sl}$ が最大となるときの θ を定めよ。

[3] m を4以上の自然数とする。赤玉 m 個と青玉 m 個の計 $2m$ 個の玉を袋に入れる。袋から玉を1個ずつ続けて4個取り出す。最初の2個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を A とする。4個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を B とする。以下では事象 A が起こる確率を $P(A)$ などと表す。

- (1) 確率 $P(A)$ 、 $P(B)$ をそれぞれ m で表せ。
- (2) 確率 $P(A \cap B)$ を m で表せ。
- (3) 事象 A も B も起こらない確率を m で表せ。

[4] a, b, c はいずれも正の有理数とする。

- (1) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ が有理数ならば、 \sqrt{a} も \sqrt{b} も有理数であることを示せ。
- (2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ が有理数ならば、 \sqrt{a} 、 \sqrt{b} 、 \sqrt{c} のいずれも有理数であることを示せ。

[5] n を0以上の整数として、次のようにおく。

$$c_n(x) = \int_0^x t^n \cos t \, dt, \quad s_n(x) = \int_0^x t^n \sin t \, dt, \quad f_n(x) = \int_0^x t^n \cos(x-t) \, dt$$

- (1) $n \geq 1$ のとき、 $c_n(x)$ 、 $s_n(x)$ を $c_{n-1}(x)$ 、 $s_{n-1}(x)$ を用いて表せ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 $f_n(x)$ を $f_{n-2}(x)$ を用いて表せ。
- (3) $\int_0^x h(t) \cos(x-t) \, dt = x^3$ を満たす多項式 $h(t)$ があれば、その一例を求めよ。