医学部　［一般・学士］（第１次試験）　数学

※学士は設問【１】は必須、
【２】又は【３】のいずれか
１問を選択

試験時間	80 分

注意事項　1. 数学(一般)の用紙は３枚である。３枚とも解答すること。
2. ３枚とも受験番号と氏名の記入を忘れないこと。
3. 【２】,【３】は，解答の過程を必ず記すこと。

【１】 次の各文の $\boxed{}$ にあてはまる答を求めよ。

(1) p, q を実数の定数，i を虚数単位とする。x の方程式

$$x^3-(p-i)x^2+(q-pi)x-2p+\frac{3p}{2}i=0$$

が $2+i$ を解にもつとする。このとき，$p=\boxed{\text{ア}}$，$q=\boxed{\text{イ}}$ である。また，この方程式の $2+i$ 以外の解を α，β（ただし $|\alpha|<|\beta|$）とおくと，$\left(\frac{\beta-i}{\alpha}\right)^7=\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) ω を正の定数とする。座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x, y)$ は時刻 t を媒介変数として，サイクロイド

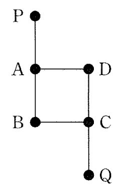
$$x=2(\omega t-\sin\omega t),\quad y=2(1-\cos\omega t)\qquad \left(0\leqq t\leqq\frac{2\pi}{\omega}\right)$$

を描くとする。時刻 t における点 P の加速度を $\vec{a}$ とするとき，その大きさは $|\vec{a}|=\boxed{\text{エ}}$ である。また，$t=0$ から $t=\frac{2\pi}{\omega}$ までの間に点 P が動く道のりは $\boxed{\text{オ}}$ である。原点と点 $(2\pi, 4)$ を通る直線を l とするとき，点 P が描く曲線と直線 l で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) O を原点とする座標空間において，点 $\mathrm{A}(-1, 0, -4)$ を通り $\vec{a}=(1, 1, 1)$ に平行な直線を l，点 $\mathrm{B}(4, -5, 0)$ を通り $\vec{b}=(-1, 2, 0)$ に平行な直線を m とする。このとき，次のような，時刻 t における動点 P，Q を考える。動点 P は $t=0$ で A を出発し，l 上を $\vec{a}$ の方向に一定の速度で進み $t=10$ で点 $(9, 10, 6)$ に到達する。一方，動点 Q は，$t=0$ から $t=2$ までは点 B で静止しており，その後，$t=2$ で B を出発し，m 上を $\vec{b}$ の方向に一定の速度で進み $t=10$ で点 $(0, 3, 0)$ に到達する。$0\leqq t\leqq 10$ における $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の各成分を t を用いて表すと $\boxed{\text{キ}}$ である。また，$0\leqq t\leqq 10$ における，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ の最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(4) 方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{7}{3}$ を満たす自然数の組 (x, y, z, w) について考える。x のとり得る値を全て求めると $\boxed{\text{ケ}}$ である。$x=y=1$ のとき，自然数の組 (z, w) を全て求めると $\boxed{\text{コ}}$ である。自然数の組 (x, y, z, w) のうち，$xyzw$ の値を最大にするものは $\boxed{\text{サ}}$ である。

【２】 図のような経路上に点 A，B，C，D，P，Q がある。点 B と点 D に球を１個ずつ置き，次の操作を繰り返す。



（操作）
・経路上に球が置かれている場合，各球を互いに独立に隣接する点へ等しい確率で動かし，各球が同じ点に置かれた場合または各球がそれぞれ点 P と点 Q に同時に置かれた場合は経路上から球を取り除く。
・経路上に球が置かれていない場合，何もしない。

n 回目の操作を終えたとき，経路上に球が２個残っている確率を X_n ($n=1, 2, 3, \cdots$) とする。以下の問いに答えよ。

(1) X_2 を求めよ。

(2) X_3 を求めよ。

(3) 自然数 k に対して，X_{2k-1} を k を用いて表せ。

(4) n 回目の操作を終えたとき，それまでの操作で，各球が同時に点 P と点 Q に置かれることにより経路上から取り除かれている確率を求めよ。

【３】 a は $a\geqq\frac{1}{2}$ を満たす定数とする。$f(x)$ は $x>-1$ で定義された関数で $f(0)=0$ を満たすとする。また，$x>-1$ で $f(x)$ は微分可能で $f'(x)>0$ であるとし，$f'(x)$ も微分可能で $f''(x)<0$ であるとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線，直線 $x=a-\frac{1}{2}$，$x=a+\frac{1}{2}$ および x 軸で囲まれた部分の面積が $f(a)$ となることを示せ。

(2) 不等式 $\frac{1}{2}\left\{f\left(a-\frac{1}{2}\right)+f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}<\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)\,dx<f(a)$ を示せ。

(3) 自然数 n に対して，不等式 $\int_{\frac{1}{2}}^{n}f(x)\,dx<\sum_{k=1}^{n}f(k)<\int_{0}^{n}f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(n)$ を示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}$ を求めよ。