数　学

［注意事項］

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ，Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

受験番号のマーク例（13015の場合）

受験番号				
1	3	0	1	5
万位	千位	百位	十位	一位
	⓪	●	⓪	⓪
●	①	①	●	①
②	②	②	②	②
③	●	③	③	③
④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	●
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

5. 問 Ⅰ，Ⅱ において，マークするときは，HB または B の黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。

正しいマーク例

①	②	●	④	⑤	⑥

誤ったマーク例

①	②	③	④	⑤	⑥	マークが薄い
①	②	③	④	⑤	⑥	マークが不完全
①	②	③	④	⑤	⑥	マークが○印
①	②	③	④	⑤	⑥	マークが∨印

7. マークで解答する場合，$\boxed{\quad}$ の中の文字は，それぞれ符号（－）または，数字 1 文字が対応している。例えば，$\boxed{アイ}$ の形の場合，－9 から－1 の整数または 10 から 99 の整数が入り得る。

－2の場合

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

32の場合

ア	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

8. 分数形で解答する場合，それ以上約分できない形で答えること。
9. 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。

I $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1)(a) $z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$，$w=z+z^2+z^4$ とする。

$w+\overline{w}=\boxed{アイ}$，$w\cdot\overline{w}=\boxed{ウ}$ より

$$\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi=\frac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}},$$

$$\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{4}{7}\pi+\sin\frac{8}{7}\pi=\frac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$$ を得る。

(b) $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ とすると $|\alpha+\beta|=\dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}}-\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$，

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\boxed{シ}}+\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$ $\left(ただし \boxed{シ}>\boxed{ス}\right)$ となる。

γ の実部が正で α，β，γ が複素数平面上で正三角形となるとき，

$\gamma=\dfrac{\boxed{ソ}+\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}+\dfrac{\boxed{ツ}+\sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{ト}}i$ である。

(2)　1から8までの8個の数から異なる数を選んで並べることにより2桁以上4桁以下の正の整数をつくる。このようにしてつくられた正の整数の集合をAとする。Aの要素であり，どの2つの桁の和も9にならない数からなる集合をA_1とする。Aの要素であり，3桁以下の数でどの2つの桁の和も9にならない数からなる集合をA_2とする。

1)　$x \in A_1$であることは，$x \in A_2$であることの $\boxed{\text{ア}}$ 。

2)　Aの要素の個数は $\boxed{\text{イウエオ}}$ 個である。

3)　A_1の要素の個数は $\boxed{\text{カキク}}$ 個であり，A_2の要素の個数は $\boxed{\text{ケコサ}}$ 個である。

4)　Aの要素で小さい方から数えて600番目の数は $\boxed{\text{シスセソ}}$ である。

ただし，$\boxed{\text{ア}}$ は以下の中から選択せよ。

(a)　必要条件であるが，十分条件ではない

(b)　十分条件であるが，必要条件ではない

(c)　必要十分条件である

(d)　必要条件でも，十分条件でもない

(3) 下図は

$$\begin{cases} x = \sin 8\theta \\ y = \sin 6\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

であらわされるリサージュ曲線Lで，下図の実線部分は点A(0，1)を通る曲線Lの一部である。また，点B(0，β)（$-1 < \beta < 0$）はL上の点である。

点Aでは$\theta = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$であり，Bでは小さい順に$\theta = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi$，$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi$で，

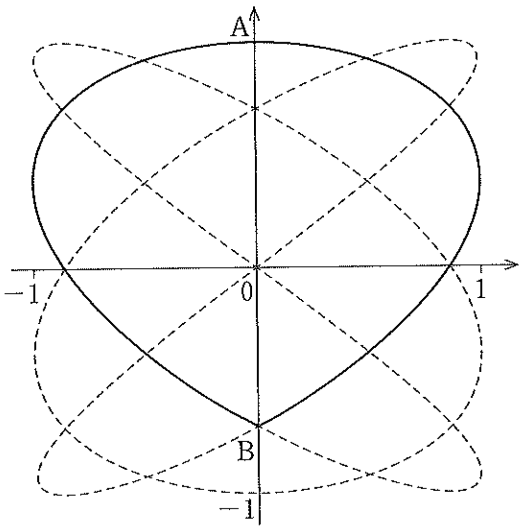
$\beta = \dfrac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$である。

実線で囲まれた図形のうち$x \geqq 0$となる部分の面積は，$x(\theta) = \sin 8\theta$，$y(\theta) = \sin 6\theta$とすると

$\displaystyle\int_{\beta}^{1} xdy = \int_{b}^{t} \boxed{コ}\,(\sin \boxed{サ}\,\theta + \sin \boxed{シス}\,\theta)\,d\theta$

と表すことができる。ここで$b = \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\pi$，$t = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$である。

よって実線で囲まれた図形全体の面積は$\dfrac{\boxed{タチ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$となる。



◇M2(631—22)

II $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

関数$f(x)$を用いて漸化式が$x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \cdots$) で与えられる数列$\{x_n\}$について考える。

(1) $x_1 = 3$，$f(x) = \dfrac{3}{4}x + 3$とすると$x_2 = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$x_3 = \dfrac{\boxed{\text{エオカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$となり，

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n = \boxed{\text{ケコ}}$ となる。

(2) $x_1 = 3$，$f(x) = \dfrac{3}{4}[x] + 3$とすると$x_2 = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$x_3 = \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$となり，

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n = \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$となる。ただし，実数$a$に対して$[a]$は$a$を超えない最大の整数とする。

(3) $x_1 = \dfrac{1}{2}$，$f(x) = \dfrac{3x}{1+x}$とすると$x_5 = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$，$x_9 = \dfrac{\boxed{\text{ナニヌネ}}}{\boxed{\text{ノハヒフ}}}$となり，

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n = \boxed{\text{ヘ}}$ となる。

(4) $f(x) = ax(1-x)$ (aは実数) とする。$0 \leqq x_1 \leqq 1$を満たすすべてのx_1に対して $0 \leqq x_n \leqq 1$ ($n = 2, 3, \cdots$)が成り立つための必要十分条件は $\boxed{\text{ホ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{マ}}$ である。このうちで$x_1 = x_2$となる0以外のx_1が存在するのは $\boxed{\text{ミ}} < a \leqq \boxed{\text{マ}}$ のときで，このようなx_1はaを用いて$x_1 = \boxed{\text{ム}} - \dfrac{\boxed{\text{メ}}}{a}$と表わされる。同様に $x_1 < x_2$，$x_3 = x_1$を満たすx_1が存在するのは $\boxed{\text{モ}} < a \leqq \boxed{\text{マ}}$ のときで，x_1はaを用いて

$$x_1 = \frac{a + \boxed{\text{ヤ}} - \sqrt{\left(a + \boxed{\text{ユ}}\right)\left(a - \boxed{\text{ヨ}}\right)}}{2a}$$

と表される。

Ⅲ

(1)　1050 と 819 の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求めよ。

(2)　2 つの正の整数 a，b $(a < b)$ があり，b を a で割った余りを r とする。
$r \neq 0$ のとき，a，b の公約数 c は r の約数であることを示せ。

(3)　2 つの正の整数 a，b $(a < b)$ があり，それらの最大公約数を m とする。このとき，ある整数 s，t を用いて $m = sa + tb$ と表されることを示せ。