一般入試　前期　2月1日　数学

I　(1)　$U=\{x \mid x$ は 100 未満の正の整数$\}$ を全体集合，集合 S の要素の個数を $n(S)$ とする．U の部分集合

$$A=\{x \mid x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\},\ B=\{x \mid x \text{ は } 4 \text{ の倍数}\},\ C=\{x \mid x \text{ は } 5 \text{ の倍数}\}$$

に対し，$n(A\cap B)=$ $\boxed{\text{ア}}$，$n(\overline{A\cup B})=$ $\boxed{\text{イウ}}$，$n(A\cap B\cap C)=$ $\boxed{\text{エ}}$，
$n((A\cup B)\cap\overline{C})=$ $\boxed{\text{オカ}}$ が成り立つ．

(2)　X，Y，Z の 3 人がこの順番で，1 から 5 までの 5 枚の番号札が入った袋から，番号札を 1 枚取り出す．取り出された番号札は袋に戻さないものとし，最も小さい数の番号札と 2 番目に小さい数の番号札を引いた 2 人が賞品を受け取る．

X が 3 の番号札を引く場合の数は $\boxed{\text{キク}}$ であり，X が 3 の番号札を引いて賞品を受け取る場合の数は $\boxed{\text{ケコ}}$ である．

X が 3 以下の番号札を引いて賞品を受け取る確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ となる．

X が 2 以上の番号札を引いて Z が賞品を受け取る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である．

X の引いた番号札が 1 でないとき，Z が賞品を受け取る確率は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である．

Ⅱ 実数を定義域とする関数$f(x)=\dfrac{x}{2x^2+1}$に対し$y=f(x)$のグラフを曲線C，x座標が$\dfrac{1}{2}$である曲線C上の点をPとして，以下の問いに答えよ．

(a) $f(x)$は，$x=\dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$において極大値$\dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$を取る．曲線$C$は変曲点を

$\boxed{オ}$個持ち，そのうちx座標が最大のものは$\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}\right)$である．

(b) 点Pにおける，曲線Cの接線ℓの方程式は$y=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}x+\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$であり，

曲線Cと接線ℓのPとは異なる交点は$\left(-\boxed{セ},\ -\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\right)$である．

曲線Cと接線ℓで囲まれた図形の面積は$\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}+\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}\log_e\boxed{ニ}$である．

(c) 点Pを通る傾きmの直線が，曲線Cと複数の共有点を持つのは

$$\frac{\boxed{ヌ}-\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}\leqq m\leqq\frac{\boxed{ヌ}+\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}$$

のときである．

III $\boxed{\text{ソ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ.

座標空間において，点A_0を$(1,1,0)$，点B_0を$(-1,-1,0)$，点C_0を$(1,-1,0)$とし，xy平面上の点P_nから点P_{n+1}を定める下記の操作をMとする.

操作M：点P_nをz軸の正の方向に2だけ平行移動した後，x軸のまわりに1回転させて得られる点P_nの軌跡とxy平面との交点のうち，y座標が最も大きい点をP_{n+1}と定める.

(a) 点A_0に対して操作Mを連続してn回施して得られる点をA_n，この点のy座標をa_nとすると，

$$a_1=\sqrt{\boxed{\text{ア}}},\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n{}^{\boxed{\text{イ}}}+\boxed{\text{ウ}}}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つ．したがって，$a_n=\sqrt{\boxed{\text{エ}}\,n+\boxed{\text{オ}}}$と表せる.

(b) $0\leqq t\leqq 1$を満たす実数tに対し，線分$\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$を$t:1-t$に内分する点をQ_0とする．点Q_0をz軸の正の方向に2だけ平行移動した点とx軸との距離は，

$\sqrt{\boxed{\text{カ}}\,t^2-\boxed{\text{キ}}\,t+\boxed{\text{ク}}}$ である.

tを$0\leqq t\leqq 1$の範囲で変化させたとき，点Q_0に対して操作Mを1回施して得られる点Q_1は，曲線

$$\boxed{\text{ケ}}\,x^{\boxed{\text{コ}}}+y^2=\boxed{\text{サ}}$$

上に存在する.

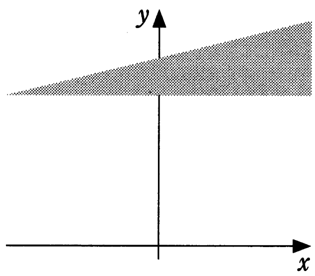
(c) 線分$\mathrm{A}_0\mathrm{C}_0$をz軸の正の方向に2だけ平行移動した線分上の点とx軸との距離の最小値は$\boxed{\text{シ}}$である．線分$\mathrm{A}_0\mathrm{C}_0$上の点に対し，操作Mを1回施して得られる点の集合は，長さ

$\sqrt{\boxed{\text{ス}}}-\boxed{\text{セ}}$ の線分となる.

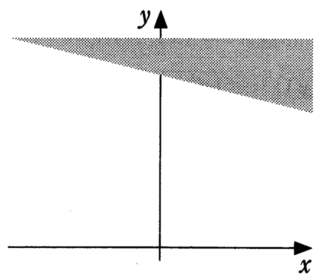
(d) 三角形 $A_0B_0C_0$ の周および内部の点に対し，操作 M を 1 回施して得られる点の集合を D とする．集合 D が表す領域の概形は $\boxed{\quad ソ \quad}$ である．

$\boxed{\quad ソ \quad}$ の解答群

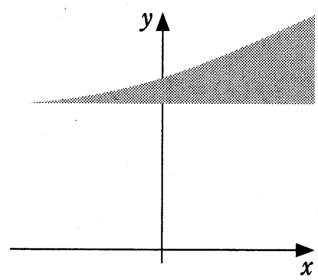
①



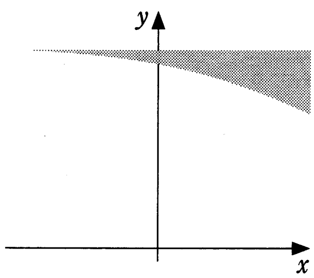
②



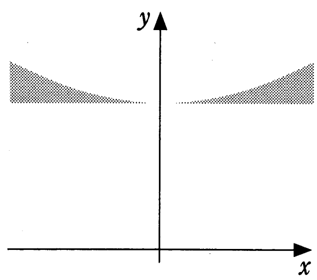
③



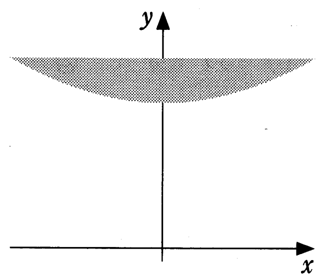
④



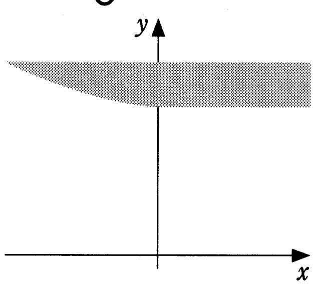
⑤



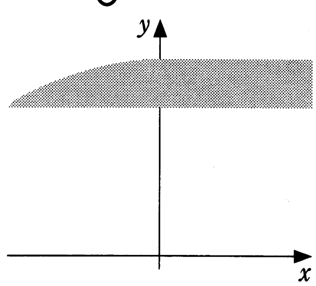
⑥



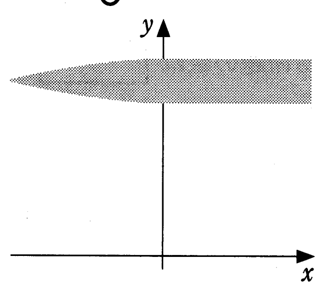
⑦



⑧



⑨



Ⅳ　x, y を正の実数，$f(x)$ を恒等的に 0 ではない微分可能な連続関数とし，$f'(x)$ はその導関数を表すものとする.

(a) 下記の6つの命題が，任意の正の実数 x, y に対して真となるように，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$ の解答として適当なものを，解答群の中から<u>すべて</u>選べ.

・$f(x) = \boxed{\text{ア}} \Longrightarrow f(x+y) = f(x) \times f(y)$

・$f(x) = \boxed{\text{イ}} \Longrightarrow f(x \times y) = f(x) + f(y)$

・$f(x) = \boxed{\text{ウ}} \Longrightarrow \{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = f(2x)$

・$f(x) = \boxed{\text{エ}} \Longrightarrow f(f(x)) + f(x) = 0$

・$f(x) = \boxed{\text{オ}} \Longrightarrow \{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 1$

・$f(x) = \boxed{\text{カ}} \Longrightarrow 3f(x) + f'(x) = 0$

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$ の解答群

① $3x+5$　② $-x$　③ $4x^2+1$　④ $\dfrac{1}{x+8}$　⑤ $6\log_2 x$

⑥ $\sin x$　⑦ $\cos x$　⑧ e^{-3x}　⑨ $\dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^{-x}}{2}$

(b) 設問(a)で示した 6 つの命題のうち，上記解答群に挙げた関数に代えて，

$f(x) = c$　(ただし，c は 0 でない適当な定数)

とすると真となる命題は $\boxed{\text{キ}}$ 個存在する．また，設問(a)で選んだ関数に対し，逆も真となる命題の数は $\boxed{\text{ク}}$ 個である.

(c) $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ を満たす関数 $f(x)$ に対し，

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \boxed{\text{ケ}}$$

が成り立ち，$f(x \times y) = f(x) + f(y)$ を満たす関数 $f(x)$ に対し，

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \boxed{\text{コ}}$$

が成り立つ.