

平成30年度 入学者選抜試験問題

一般入学試験

数 学 (70分)

I 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は16ページあります。ただし、出題ページは下記のとおりです。
4, 6, 8, 10, 12ページ
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督員に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 受験番号欄
受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
 - ② 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
- 5 試験開始後30分間および試験終了前5分間は退出できません。
- 6 この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。この問題冊子は試験終了後回収します。

II 解答上の注意

- 1 「解答上の注意」が、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

受 験 番 号			

(問題は次ページから始まる)

1 次の問いに答えなさい。

(1) 複素数の偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ で考え、 i は虚数単位とする。

2つの複素数 α , β はそれぞれ

$$\alpha^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad 0 \leq \arg \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\beta^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad 0 \leq \arg \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

を満たしている。このとき

$$\arg(\alpha^3\beta^3) = \frac{\text{ア}}{\text{イウ}}\pi, \quad \arg\left(\frac{\alpha^3}{\beta^3}\right) = \frac{\pi}{\text{エオ}}$$

である。

$z = \frac{\alpha}{\beta}$ とおくと、 $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$ を満たす最小の自然数 n の値は

$$n = \text{カキ} \text{ であり、 } 2z^{96} + \frac{1}{2z^{96}} = \frac{\text{クケ}}{\text{コ}} + \frac{\text{サ}}{\text{ス}} \sqrt{\frac{\text{シ}}{\text{ス}}} i \text{ である。}$$

(2) a, b は正の整数とし、 $a \geq b$ とする。

三角形 ABC において、 $BC = a$, $CA = b$, $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ とし、三角形 ABC の内接円の半径を r とする。このとき

$$a + b - \text{セ} r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

が成り立つ。

$r = 2$ のとき、組 (a, b) は

$$(a, b) = (\text{ソ}, \text{タ}), (\text{チツ}, \text{テ})$$

である。

また、 $r = 2^{100}$ のとき、組 (a, b) は全部で トナニ 組ある。

ある 3 以上の素数 p について、 $r = p^{100}$ のとき、組 (a, b) は全部で ヌネノ 組ある。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

2 箱の中に、Aと書かれたカードが m 枚、Bと書かれたカードが $(150 - m)$ 枚入っている (m は $0 \leq m \leq 150$ を満たす整数)。また、袋Aの中には赤球が7個、白球が2個、袋Bの中には赤球が2個、白球が7個入っている。

箱の中から1枚のカードを取り出し、カードに書かれた文字の袋の中から1個の球を取り出す。ただし、取り出したカードと球はそれぞれもとに戻すものとする。

この試行を n 回 (n は正の整数)繰り返す。

(1) $m = 30, n = 6$ とする。

赤球をちょうど2回取り出す確率は $\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエオ}}}$ である。

白球を連続して取り出すことがない確率は $\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケコ}}}$ である。

(2) $m = 30, n = 10$ とする。

赤球を5回以上連続して取り出す確率は $\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ である。

また、赤球を5回以上連続して取り出したとき、4回目の試行で白球を取り出し

ている確率は $\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(3) $n = 100$ とする。

赤球を k 回 (k は $0 \leq k \leq 100$ を満たす整数)取り出す確率を p_k とする。 p_k が最大となる k の値が70であるとき、 m のとり得る値は、 $\boxed{\text{トナニ}}$ または $\boxed{\text{又ネノ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{トナニ}} < \boxed{\text{又ネノ}}$ とする。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

3 三角形 OAB において、辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C、辺 OB を 1 : 2 に内分する点を D とする。

線分 AD、BC の交点を E とするとき

$$\vec{OE} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{OB}$$

である。

線分 OE の延長と辺 AB の交点を F とするとき

$$\vec{OF} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{オ}}} \vec{OB}$$

である。

三角形 OAB と三角形 CFD の面積比は

$$\frac{\triangle CFD}{\triangle OAB} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である。

三角形 OAB の面積が $10\sqrt{3}$ であり、三角形 CFD が正三角形のとき

$$\vec{CD} \cdot \vec{CF} = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

であり

$$|\vec{OA}| = \sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$$

$$|\vec{OB}| = \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タチ}}}$$

である。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

4 関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が

$$\begin{cases} f_1(x) = \cos x \\ f_{n+1}(x) = \cos x + x \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

を満たしている。

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。このとき

$$a_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \pi$$

である。 a_{n+1} を a_n を用いて表すと

$$a_{n+1} = -\boxed{\text{ウ}} a_n + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \pi$$

であり、数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n = \left\{ \frac{\left(-\boxed{\text{カ}}\right)^{n-1}}{\boxed{\text{キ}}} + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \right\} \pi$$

である。

k を正の整数とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^n} \cdot \frac{\left(-\boxed{\text{カ}}\right)^{n-1}}{\boxed{\text{キ}}} \pi \right\}$ が収束するような

k の値の最小値は

$$k = \boxed{\text{コ}}$$

である。 $k \geq \boxed{\text{コ}}$ のとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k^n}$ も収束し、その和を S_k とすると、

$$\sum_{k=\boxed{\text{コ}}}^{\infty} \frac{6S_k}{\pi k} = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$$

である。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

5 座標空間において原点 $O(0, 0, 0)$ と 3 点 $A(4, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 2, 2)$ を頂点とする四面体 $OABC$ がある。この四面体を z 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよう。

t を $0 \leq t \leq 2$ を満たす実数とする。平面 $z = t$ と線分 AC , BC , OC との交点をそれぞれ P , Q , R とする。このとき, P , Q , R の座標は

$$P(\text{ア} - \text{イ}t, t, t), Q(0, \text{ウ}, t), R(0, t, t)$$

である。

また, 平面 $z = t$ と z 軸との交点を $H(0, 0, t)$ とすると

$$HQ^2 = \text{エ}, HP^2 = \text{オ}t^2 - \text{カキ}t + \text{クケ}$$

である。

よって

$$0 \leq t < \frac{\text{コ}}{\text{サ}} \text{ のとき, } HP > HQ$$

$$\frac{\text{コ}}{\text{サ}} \leq t \leq 2 \text{ のとき, } HP \leq HQ$$

となる。

この結果, 四面体 $OABC$ を z 軸の周りに 1 回転してできる立体を平面 $z = t$ で切った断面の面積 $S(t)$ は

$$0 \leq t \leq \frac{\text{コ}}{\text{サ}} \text{ のとき, } S(t) = \pi(\text{シ}t^2 - \text{スセ}t + \text{ソタ})$$

$$\frac{\text{コ}}{\text{サ}} \leq t \leq 2 \text{ のとき, } S(t) = \pi(\text{チ}t^2 + \text{ツ})$$

となる。

したがって

$$V = \frac{\text{テトナ}}{\text{ニヌ}} \pi$$

となる。