一般入試　数学

I　次のように定義される２つの数列を $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ とする．

$$a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - b_n,\ b_{n+1} = 4a_n + 7b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(a)　$a_2 = \boxed{\text{ア}}$ であり，数列 $\{a_n\}$ は自然数 n に対し次式を満たす．

$$a_{n+2} - pa_{n+1} = p(a_{n+1} - pa_n),\ \text{ただし}\ p = \boxed{\text{イ}}.$$

したがって，数列 $\{a_{n+1} - pa_n\}$ は，公比 $\boxed{\text{ウ}}$ の等比数列であり，

$$a_{n+1} - pa_n = \boxed{\text{エオ}} \times \boxed{\text{カ}}^{\,n-1} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

(b)　式 $(*)$ の両辺を p^{n+1} で割ると，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{p^n}\right\}$ の階差数列が定数 $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ となることがわかる．これより，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = \left(\boxed{\text{サシ}}\,n + \boxed{\text{ス}}\right) \times \boxed{\text{セ}}^{\,n-2}$$

と求められる．

(c)　２つの数列を用いて表される極限値，および無限級数の和について，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2a_n + b_n} = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$$

が成立する．

II　一辺の長さが 6 で，座標空間内の原点 O を重心とする正三角形 ABC が xy 平面内にあり，これと合同な正三角形によって囲まれた，図 1 のような正八面体 ABC–DEF が $z \geqq 0$ の領域にある．点 A は x 軸上 $x > 0$ の領域にあり，三角形 DEF の重心は z 軸上に存在する．辺 BC の中点を M，$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して，辺 AD を $t : 1-t$ に内分する点を P として，以下の問いに答えよ．

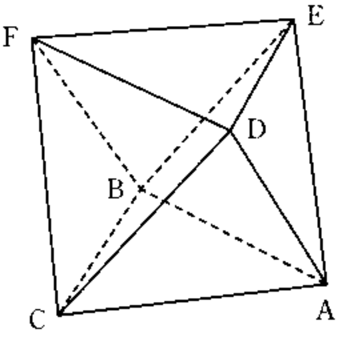

図 1

(a)　点 A の x 座標は $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，点 D の z 座標は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である．

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{MF}} = \left(\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}},\ 0,\ \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}} \right)$ である．

正八面体の一辺を共有する隣あう 2 つの面のなす角を θ とすると，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ が成り立つ．

(c)　点 P を通り xy 平面に平行な平面で正八面体を切ったとき，断面の図形は，周の長さが $\boxed{\text{シス}}$ である $\boxed{\text{セ}}$ 角形となる．

t を $0 < t < 1$ の範囲で変化させると，$t = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のとき，この断面の面積が最大値 $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ をとり，断面の外接円の半径が $\boxed{\text{ナ}}$ となる．

III　x を実数，$f(x) = |x^2 - x - 6|$ として，以下の問いに答えよ．

(a)　不等式 $f(x) > 2x + 6$ の解は

$$x < \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad \boxed{\text{オカ}} < x < \boxed{\text{キ}},$$

$$\frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}} < x$$

である．

(b)　方程式 $f(x) = 2x + k$ が異なる3つの実数解を持つように，定数 k の値を求めると，

$k = \boxed{\text{ク}}$ または $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ となる．

(c)　区間 $-3 < x < 4$ において，$y = \sin(f(x))$ のグラフには，極大となる点が $\boxed{\text{シ}}$ 個存在する．これらの点のうち，極大値が1未満となるのは，$x = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ のときである．

IV　実数 x に対して，$f(x)$ は，$x \neq 0$ のとき $f(x) = -|x|\log_e|x|$ であり，$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ を満たす関数として定義する．必要があれば $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_e x}{x} = 0$ を用いてよい．

(a)　$f(0) = \boxed{\text{ア}}$ である．

(b)　$f(x)$ の最大値を α，$f(x)$ の最大値を与える x の値を β とすると，$\log_e \alpha = \boxed{\text{イウ}}$，$\log_e|\beta| = \boxed{\text{エオ}}$ が成り立つ．

(c)　$t \neq 0$ を満たす実数 t に対し，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を考える．接線が点 $(-1,\ 1)$ を通るとき，接点の x 座標 t は，

$$t + \log_e|t| = \boxed{\text{カ}} \text{ または } \boxed{\text{キク}}$$

を満たし，このような接線は $\boxed{\text{ケ}}$ 本存在する．

(d)　$0 < k < |\beta|$ を満たす定数 k に対し，$x \geqq k$ の領域において直線 $x = k$，曲線 $y = f(x)$ および x 軸によって囲まれる図形の面積を $S(k)$，この図形を y 軸の回りに1回転してできる立体の体積を $V(k)$ とすると，

$$\lim_{k \to 0} S(k) = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \lim_{k \to 0} V(k) = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$$

が成り立つ．