慶應義塾大学入学試験問題

医　　学　　部

数　　学

注意事項

1. 受験番号と氏名は解答用紙の所定の記入欄にそれぞれ記入してください。
2. 受験番号は所定欄の枠の中に１字１字記入してください。
3. 解答は，必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
4. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
5. この問題冊子の総ページ数は12ページです。試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているかどうか確認してください。ページの脱落や重複があったら直ちに監督者に申し出てください。
6. この問題冊子は，試験終了後に持ち帰ってください。

［I］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

（1）　$a>1$ に対し，集合 $A(a)$ を

$$A(a)=\left\{x \,\middle|\, x \text{ は実数かつ } \log_a(x+2a)-\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{x}{4}\right)<2\right\}$$

により定義するとき，$A(a)\subset(-\infty,\,4)$ となるような a の範囲を不等式で表すと，

$\boxed{\text{（あ）}}$ である。

（2）　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ はどれも大きさが1で，$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}=\vec{0}$ を満たしている。このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{（い）}}$ であり，$\left|\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}\right|$ は $t=\boxed{\text{（う）}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{（え）}}$ をとる。

（3）　k を自然数とする。赤い玉と白い玉がそれぞれ $2k$ 個ずつある。これらをすべて円周上に等間隔に並べる並べ方の総数を N_k とおくと，

$$N_1=\boxed{\text{（お）}},\quad N_2=\boxed{\text{（か）}},\quad N_3=\boxed{\text{（き）}}$$

である。ただし，回転して並びが同じになるものは同じ並べ方と考える。

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

kを2以上の自然数とする。2つの袋A，Bがあり，袋Aには番号1からkまでが書かれたカードが1枚ずつ（計k枚）入っていて，袋Bには番号0から2までが書かれたカードが1枚ずつ（計3枚）入っているとする。この状態から始めて，以下の操作Tを繰り返し行う。

操作T

(T1) それぞれの袋の中から無作為にカードを1枚ずつ取り出す。

(T2) (i) 取り出した2枚のカードの番号が同じ場合は，取り出したカードを2枚とも袋Aにいれる。

(ii) 取り出した2枚のカードの番号が異なる場合は，取り出した2枚のカードそれぞれをもとの袋に戻す。

以下，nを自然数とする。操作Tをn回繰り返し終えたとき，袋Bの中にカードが3枚入っている確率を$a_n(k)$，ちょうど2枚入っている確率を$b_n(k)$とする。

(1) $n \geqq 2$のとき，$a_n(k)$，$b_n(k)$を$a_{n-1}(k)$，$b_{n-1}(k)$で表すと，

$$\begin{cases} a_n(k) = \boxed{\text{(あ)}}\, a_{n-1}(k) \\ b_n(k) = \boxed{\text{(い)}}\, a_{n-1}(k) + \boxed{\text{(う)}}\, b_{n-1}(k) \end{cases}$$

である。

(2) (1)より，$a_n(k)$をkとnの式で表すと，$a_n(k) = \boxed{\text{(え)}}$である。また，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k(k) = \boxed{\text{(お)}}$である。

(3) $k=3$のとき，$b_n(3)$をnの式で表すと，

$$b_n(3) = \boxed{\text{(か)}}\left(\boxed{\text{(き)}}\right)^n \left\{1-\left(\boxed{\text{(く)}}\right)^n\right\}$$

である。ただし，$\boxed{\text{(か)}} > 0$であり，$\boxed{\text{(か)}}$，$\boxed{\text{(き)}}$，$\boxed{\text{(く)}}$は文字n，kを含まないものとする。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄の $\boxed{（け）}$ には適切な式を，それ以外には適切な数を入れて文章を完成させなさい。

（1） x を実数として

$$f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x$$

とおく。このとき

$$f(x)=\boxed{（あ）}\sin 2x+\boxed{（い）}\sin 4x+\boxed{（う）}\sin 6x$$

と書くことができる。p を $f(p)=0$ を満たす最小の正の数とするとき，

曲線 $y=f(x)\ (0\leqq x\leqq p)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{（え）}$ である。

（2） x を実数として

$$g(x)=-\sin x\sin 2x+\sin 2x\sin 3x-\sin 3x\sin x$$

とおく。このとき

$$g(x)=\boxed{（お）}(\cos 2x+\cos 5x)+\boxed{（か）}\cos 3x+\boxed{（き）}\cos 4x$$

と書ける。また $g\left(\dfrac{\pi}{7}\right)=\boxed{（く）}$ である。

（3） α, β, γ を実数として

$$A=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$$

$$B=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma$$

$$C=\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha$$

とおく。C を A，B の式で表すと，$C=\boxed{（け）}$ である。

以下，$\alpha=\dfrac{\pi}{7}$，$\beta=-\dfrac{2\pi}{7}$，$\gamma=-\dfrac{3\pi}{7}$ のときを考える。i を虚数単位として，$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{7}z^k=\boxed{（こ）}$ であり，このことから上記の α，β，γ の値に対して B の値を求めると，$B=\boxed{（さ）}$ である。$g\left(\dfrac{\pi}{7}\right)=C$ であることと，A の符号に注意すると，A の値は $\boxed{（し）}$ である。このことから $f\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$ の値は $\boxed{（す）}$ である。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問（2）に答えなさい。

媒介変数表示

$$x=g(\theta)=\theta+\sin\theta,\ y=h(\theta)=1-\cos\theta \quad (-\pi<\theta<\pi)$$

で表される座標平面上の曲線 C を考える。

（1） 曲線 C は点($\boxed{\text{（あ）}}$, $\boxed{\text{（い）}}$)において x 軸に接する。また，曲線 C 上の点の x 座標，y 座標の動く範囲はそれぞれ

$$\boxed{\text{（う）}}<x<\boxed{\text{（え）}},\quad \boxed{\text{（お）}}\leqq y<\boxed{\text{（か）}}$$

である。

（2） $\boxed{\text{（う）}}<x<\boxed{\text{（え）}}$ を満たす任意の x に対して，それを x 座標とする C 上の点Pはただ1つに決まることを示しなさい。また，この点Pの y 座標を $y=f(x)$ と書くとき，関数 $f(x)$ のグラフは下に凸であることを示しなさい。

（3） $0<t<\pi$ とする。曲線 C の $0\leqq\theta\leqq t$ に対する部分の長さ $L(t)$ を求めると，$L(t)=\boxed{\text{（き）}}$ である。

（4） $0<t<\pi$ に対する曲線 C 上の点 $(g(t),h(t))$ を P_t とするとき，P_t における C の接線を l_t とし，l_t と x 軸との交点を Q_t とする。Q_t の x 座標は $\boxed{\text{（く）}}$ であり，ベクトル $\overrightarrow{Q_tP_t}$ が x 軸の正の向きとなす角は $\boxed{\text{（け）}}$ ラジアンである。

（5） 曲線 C が，x 軸に接しつつ，すべることなく右方向に回転する。回転する前の C 上の点 $P_t(g(t),h(t))$（$0<t<\pi$）が x 軸との接点になるまで C が回転したとき，回転する前の点 $P_0(g(0),h(0))$ が点 $R_t(a(t),b(t))$ に移動したとする。$a(t)$，$b(t)$ を t の式で表すと，

$$a(t)=\boxed{\text{（こ）}},\quad b(t)=\boxed{\text{（さ）}}$$

である。

（6） 動点 R_t（$0<t<\pi$）の軌跡，x 軸，および直線 $x=\alpha$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{（し）}}$ である。ただし $\alpha=\lim\limits_{t\to\pi-0}a(t)$ とする。