平成２８年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

数　学 (70分)

Ⅰ　注意事項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。
　4，6，8，10，12ページ

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**

氏名・フリガナを記入しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

Ⅱ　解答上の注意

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

受　験　番　号			

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字（0～9），符号（−，±），自然対数の底（e）のいずれかが入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。
なお，解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は，それぞれ大問の番号を表します。

例1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に −83 と答えたいとき。

1	解答欄												
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
イ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	e
ウ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	e

分数形で解答する場合は，**既約分数**で答えなさい。**符号は分子**につけ，分母につけてはいけません。

例2　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解答欄												
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
オ	−	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	e
カ	−	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9	e

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい。

(1) m を実数の定数とする。x についての 2 つの 2 次不等式

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \quad \cdots\cdots①$$

$$x^2 - 2mx - 8m^2 < 0 \cdots\cdots②$$

を考える。

①の解は

$$\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$$

である。

①を満たすすべての実数が②を満たすような m の値の範囲は

$$m \leqq \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}},\quad \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \leqq m$$

である。

また，①，②をともに満たす実数 x が存在しないような m の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \leqq m \leqq \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

(2) 4 進法で表された $123_{(4)}$ を 10 進法で表すと，$\boxed{\text{スセ}}$ である。

整数 n を 4 進法で表したとき，3 桁になった。このとき，n のとり得る値の範囲を 10 進法で表すと

$$\boxed{\text{ソタ}} \leqq n \leqq \boxed{\text{チツ}}$$

である。

10 進法で表された 3^{20} を 4 進法で表すと，その桁数は $\boxed{\text{テト}}$ である。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$ 袋の中に，1，2，…，m (m は 2 以上の整数) の数字が書かれた球がそれぞれ n 個ずつ (n は正の整数)，合計 mn 個入っている。この袋の中から同時に 2 個の球を取り出す。

取り出した球に書かれている数字が k，l ($k \geqq l$) のとき，$x = k$，$y = l$ とする。

(1) $m = 6$，$n = 3$ のとき，$x - y = 3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。

(2) $2(x - y) \geqq m$ となる確率を p とする。

$m = 18$，$n = 3$ のとき，$p = \dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カキ}}$ である。

m が偶数，$n = 3$ のとき，$p = \dfrac{\boxed{ク}\,m + \boxed{ケ}}{\boxed{コサ}\,m - \boxed{シ}}$ である。

(3) $2(x - y) < m$ となる確率は，m が偶数のとき

$$\frac{\boxed{ス}\,mn - \boxed{セ}\,n - \boxed{ソ}}{\boxed{タ}\left(mn - \boxed{チ}\right)}$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$　三角形 ABC について，AB = 5，BC = 7，CA = 8 とする。このとき

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \boxed{アイ}$$

である。∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする。このとき

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}\overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}\overrightarrow{AC}$$

である。

また，三角形 ABC の内接円の中心を I，外接円の中心を O とすると

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}\overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}\overrightarrow{AC}$$

である。

したがって

$$|\overrightarrow{OI}|^2 = \frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$$

である。

三角形 ABC の外接円の周上を動く点 P と内接円の周上を動く点 Q があるとき，線分 PQ の長さの最大値は

$$\frac{\boxed{ニヌ} + \sqrt{\boxed{ネ}}}{\sqrt{\boxed{ノ}}}$$

である。

(下　書　き　用　紙)

数学の試験問題は次に続く。

4 次の問いに答えなさい。ただし，$\boxed{\text{チ}}$ には $\boxed{\text{X}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ に入る言葉の組合せとして最も適切なものを，下の選択肢 ①～⑥ のうちから一つ選びなさい。

複素数 α を $\alpha=-7+4\sqrt{3}i$ とし，実数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$a_n+4\sqrt{3}\,b_n i=\alpha^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定める。ただし，i は虚数単位である。a_n と b_n を α とその共役な複素数 $\overline{\alpha}$ で表すと

$$a_n=\frac{\alpha^n+(\overline{\alpha})^n}{\boxed{\text{ア}}},\quad b_n=\frac{\alpha^n-(\overline{\alpha})^n}{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,i}$$

となるので，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は漸化式

$a_{n+2}+\boxed{\text{エオ}}\,a_{n+1}+\boxed{\text{カキ}}\,a_n=0$ ……①

$b_{n+2}+\boxed{\text{エオ}}\,b_{n+1}+\boxed{\text{カキ}}\,b_n=0$ ……②

を満たす。これらを用いて，すべての自然数 n に対して

a_n と b_n が互いに素な整数である …… (*)

ことを，数学的帰納法により証明する。

[1] $n=1,\ 2$ のとき

$a_1=\boxed{\text{クケ}}$，$b_1=\boxed{\text{コ}}$，$a_2=\boxed{\text{サ}}$，$b_2=\boxed{\text{シスセ}}$

であるから，(*) が成り立つ。

[2] $n=k,\ k+1$ のとき (*) が成り立つと仮定する。

まず①，②より，a_{k+2}，b_{k+2} は $\boxed{\text{X}}$ である。ここで

$a_n{}^2+48b_n{}^2=\boxed{\text{ソタ}}^n$ ……③

がすべての自然数 n で成り立つ。$\boxed{\text{ソタ}}$ が $\boxed{\text{Y}}$ であるから，a_{k+2}，b_{k+2} が $\boxed{\text{Z}}$ と仮定すると③より，これら2数は $\boxed{\text{ソタ}}$ の倍数でなければならない。ところが，このとき①，②より a_{k+1}，b_{k+1} は $\boxed{\text{ソタ}}$ の倍数となり，数学的帰納法の仮定と矛盾する。よって，$n=k+2$ のときも (*) が成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について (*) が成り立つ。

$\boxed{\text{チ}}$ の選択肢

	X	Y	Z
①	整数	素数	互いに素でない
②	整数	素数	互いに素である
③	素数	素数	互いに素でない
④	整数	整数	互いに素である
⑤	素数	整数	互いに素でない
⑥	素数	整数	互いに素である

(下　書　き　用　紙)

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{5}$　xy 平面上の放物線 $y=x^2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ に対応する部分の長さを L とする。L の値を次のようにして求めよう。L は定積分

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+\boxed{\text{ア}}\,x^2}\,dx$$

で定まる。この定積分を計算するために $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}$ として，置換積分を行う。

このとき

$$\frac{dx}{dt}=\frac{e^t+e^{-t}}{4}$$

であり

$$\sqrt{1+\boxed{\text{ア}}\,x^2}=\frac{e^t+e^{-t}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。

また，$\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}=1$ となる t の値を α とすると，x が $0 \to 1$ と変化するとき，t は $\boxed{\text{ウ}} \to \alpha$ と変化するので，L を定める定積分は

$$L=\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\alpha}\left(e^t+e^{-t}\right)^{\boxed{\text{オ}}}dt$$

となる。ここで $X=e^{\alpha}$ とおくと，X は 2 次方程式

$$X^2-\boxed{\text{カ}}\,X-\boxed{\text{キ}}=0$$

の解である。$X>0$ なので

$$X=\boxed{\text{ク}}+\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。これを用いて α の値を定め，L の値を計算すると

$$L=\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}+\frac{1}{\boxed{\text{シ}}}\log\left(\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。