

平成 28 年度入学試験問題

数 学

I 注 意 事 項

1. 指示があるまで、この冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は、空白のページを除いて全部で6ページです。設問はIからIVまであります。
3. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので、正確に記入しなさい。
 - ① 氏名欄……………氏名を記入しなさい。
 - ② 受験番号欄……………受験番号(6桁の数字)を記入し、受験番号をマーク欄に必ずマークしなさい。
4. マークにはHBの鉛筆を使用し、次の例のように、濃く正しくマークしなさい。



正確にマークされていない場合、採点できないことがあります。

5. 答えを修正する場合は必ず「プラスチック製消しゴム」で完全に消し、消しくずを解答用紙上に残してはいけません。
6. この冊子の余白を計算に用いてかまいません。
7. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。
8. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気がついた場合は、手を上げて申し出なさい。
9. 試験中に質問がある場合は、手をあげて申し出なさい。
10. 中途退場は認めません。

II 解答上の注意

解答上の注意が裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、冊子を開いてはいけません。

問題は次のページから始まります。

I

(1) 2^n を 9 で割った余りが 1 となる最小の正の整数 n は である。また、 2^{100} を 9 で割った余りは である。

(2) x^{10} を $(x+1)^3$ で割った余りは x^2 + x + である。

(3) 分子が奇数、分母が 2 の累乗である分数の項からなる、第 n 群に 2^{n-1} 個の項を含む次のような群数列を考える。

$$\frac{1}{2} \quad \left| \quad \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \quad \right| \quad \frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8} \quad \left| \quad \frac{15}{16}, \dots$$

第 1 群 第 2 群 第 3 群

最初から数えて 100 番目の項は、第 群の第 項であり、その値は

である。この群に含まれる項の総和は である。

自然数 n に対し、第 n 群の初項を a_n 、末項を b_n 、第 n 群に含まれる項の総和を S_n とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{ト} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{ナ} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{2^n} = \frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$$

が成り立つ。

II k は実数の定数, x は $-1 \leq x \leq 2$ を満たす実数とし, この区間を定義域とする関数

$$f(x) = 2^{1+2x} + 2^{1-2x} - 17k(2^x + 2^{-x}) + 40k - 7, \quad g(x) = 2^x + 2^{-x}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(a) $f(x) = h(g(x))$ が成り立つように, 2次関数 $h(t)$ を定義すると,

$$h(t) = \boxed{\text{ア}} t^2 - \boxed{\text{イウ}} kt + 40k - \boxed{\text{エオ}}$$

となる. $y = h(t)$ が表すグラフは, 定数 k の値に依らず定点 P を通る. 点 P の y 座標は

$\boxed{\text{カキ}}$

$\boxed{\text{クケコ}}$ である.

(b) $y = g(x)$ と $y = t$ が表すグラフの共有点の個数は

• $a < t \leq b$ のときは 2 個

• $t = a$ または $b < t \leq c$ のときは 1 個

• $t < a$ または $c < t$ のときは $\boxed{\text{サ}}$ 個

である. ただし, $a = \boxed{\text{シ}}$, $b = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$, $c = \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である.

(c) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解を持つように, 定数 k の範囲を求めると,

$$k = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \text{ または } \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leq k \leq \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

となる.

Ⅲ , , の解答は解答群の中から最も適当なものをそれぞれ1つずつ選べ.

i は虚数単位, \bar{z} は z と共役な複素数を表すものとして, 原点を O とする複素数平面上の図形について, 以下の問いに答えよ.

(1) 次の方程式を満たす点 z の全体が表す図形は,

(a) $|z + 1| = |z - 1 - 2i|$ が ,

(b) $|z| = 2|z - 2|$ が ,

(c) $|z| + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 1$ が

である.

, , の解答群

- ① 直線 ② 円 ③ 楕円 ④ 双曲線 ⑤ 放物線

(2) k を正の実数とする. 方程式 $|z| = \sqrt{k}|z - 2|$ を満たす点 z の全体が表す図形と, 問題(1)の(a)の方程式が表す図形が接するとき, 定数 k は

$$k = \text{エ} \pm \text{オ} \sqrt{\text{カ}}$$

を満たす. $k = \text{エ} + \text{オ} \sqrt{\text{カ}}$ のとき, 2つの図形の接点を表す複素数 α は

$$\alpha = \text{キ} + \frac{\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}} - \frac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}} i$$

である. また, $k = \text{エ} - \text{オ} \sqrt{\text{カ}}$ のときの2つの図形の接点を表す複素数を β とすると,

$$\bar{\alpha}\beta = \text{シ} \sqrt{\text{ス}} i$$

となる.

- (3) 正の実数 c と $\tan \theta = 2$, $0 < \theta < \pi$ を満たす θ に対し, 複素数 $w = c(\cos \theta + i \sin \theta)$ を考える. $\gamma_0 = 2$ で表される複素数平面上の点を A, $\gamma_1 = \gamma_0 w$ で表される点を B とする. 直線 OB と直線 AB が直交するとき,

$$c = \frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であり, 線分 AB の長さは

$$AB = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる. このとき, 自然数 n に対して, $\gamma_n = \gamma_0 w^n$ とすると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n - \gamma_{n-1}| = \boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}}$$

となる.

IV ツ の解答は解答群の中から最も適当なものを1つ選べ.

2つの定数 a, b を係数に持つ3次関数 $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax + b$ に対し, $y = f(x)$ のグラフを C とする.

(a) 曲線 C の変曲点とは異なる点 $T(t, f(t))$ における C の接線 l の方程式を $y = g(x)$ とする.

この接線と曲線 C の共有点のうち T ではない交点を $S(s, f(s))$ とすると,

$$f(x) - g(x) = \text{ア} (x - s)(x - t) \text{イ}$$

と表すことができる. この式の x^2 の係数は ウ なので,

$$\text{エ} t + s = \frac{\text{オカ}}{\text{キ}}$$

が成り立つ.

(b) 曲線 C の変曲点から x 軸におろした垂線と接線 l との交点を H とする. 点 H の x 座標は

$$\frac{\text{クケ}}{\text{コ}}$$

であり, 点 H は線分 ST を サ : 1 に内分する.

(c) 接点 T の x 座標が $t = -1$ のとき, 交点 S の x 座標は $s = \frac{\text{シ}}{\text{ス}}$ であり, 曲線 C と接線

l で囲まれた図形の面積は $\frac{\text{セソ}}{\text{タチ}}$ となる.

また, ツ により, 接線 l の傾きが $f'(u)$ と等しくなるような実数 u が $t < u < s$ (ある

いは $s < u < t$) の範囲に存在する. $t = -1$ のとき, これを満たす実数 u は $\frac{\text{テト}}{\text{ナ}}$ である.

ツ の解答群

- | | | |
|------------|-------------|-------------|
| ① 正弦定理 | ② 加法定理 | ③ ド・モルガンの法則 |
| ④ はさみうちの原理 | ⑤ 平均値の定理 | ⑥ メネラウスの定理 |
| ⑦ 中間値の定理 | ⑧ ド・モアブルの定理 | |

II 解答上の注意

- 1 問題の文中の ア , イウ などには、特に指示がないかぎり、数字(0~9)、または負の符号(-)が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイ に-8と答えたいとき

ア	<input checked="" type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
イ	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input checked="" type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9

- 2 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。負の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として

ウ	<input checked="" type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
エ	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input checked="" type="radio"/> 4	<input type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9
オ	<input type="radio"/> 0	<input type="radio"/> 1	<input type="radio"/> 2	<input type="radio"/> 3	<input type="radio"/> 4	<input checked="" type="radio"/> 5	<input type="radio"/> 6	<input type="radio"/> 7	<input type="radio"/> 8	<input type="radio"/> 9

- 3 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $\sqrt{\frac{\text{カ}}{\text{キ}}}$, $\frac{\sqrt{\text{クケ}}}{\text{コ}}$, $\sqrt{\frac{\text{サ}}{\text{シ}}}$ に $2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $6\sqrt{2}$ と

答えるところを、 $1\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$, $3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。